Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический
университет

Методические указания и контрольные задания для подготовки к внешнему независимому оцениванию по математике

РАЗДЕЛ 4: ТРИГОНОМЕТРИЯ

Севастополь
2009

УДК 51(075)
Методические указания и контрольные задания для подготовки к внешнему независимому оцениванию по математике. Раздел 4: Тригонометрия / Сост.: Л.Т. Потепалова – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009 г. – 68 с.

Целью методических указаний является оказание помощи учащимся школ, лицеев и других средних учебных заведений в подготовке к внешнему независимому оцениванию и выполнении контрольных заданий по теме «Тригонометрия».

Указания содержат необходимые теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, а также контрольную работу и тесты.

Методические указания предназначены, прежде всего, учащимся средних школ, лицеев и гимназий и могут быть использованы для проведения занятий на подготовительных курсах и при самостоятельной подготовке к внешнему независимому оцениванию.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол №_6_ от _26.02.09__ года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Деркач М. И., к.ф.-м.н., доцент.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Основные понятия, определения и формулы 3
2 Тригонометрические функции, их свойства и графики . . 23
3 Обратные тригонометрические функции 26
4 Тригонометрические уравнения 31
5 Тригонометрические неравенства 50
6 Тестовые и контрольные задания 61
7 Библиографический список 67

§1 Основные понятия, определения и формулы

Слово «тригонометрия» составлено из греческих слов «тригонон» – треугольник и «метризас» – измерение, и означает «измерение треугольников».

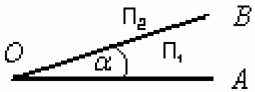
Основная задача тригонометрии состоит в решении треугольников, т.е. в вычислении неизвестных элементов треугольника по данным значениям других его элементов, например, в нахождении углов треугольника по его сторонам.

Углы и их измерение

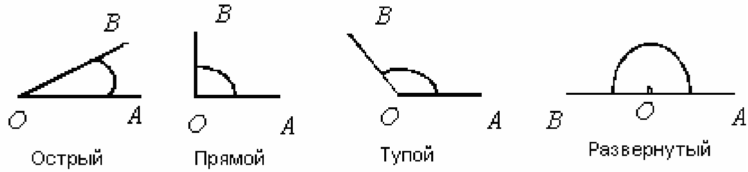
Углом называется фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из общей точки. Лучи называются *сторонами* угла, а их общая начальная точка – *вершиной* угла.

Угол, образованный лучами OA и OB обозначается символом $\angle AOB$ (угол AOB). Углы также обозначаются малыми греческими буквами α, β, γ и т.д. Например, $\angle AOB = \alpha$.

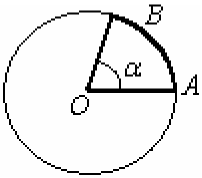
Замечание. Угол AOB делит плоскость на две части: Π_1 и Π_2.



Каждая из этих частей (вместе с ограничивающими её лучами) также называется углом (*плоским углом*). Угол, стороны которого дополняют друг друга до прямой, т.е. являются дополнительными полупрямыми, называется *развёрнутым*. Угол, равный половине развёрнутого, называется *прямым* углом. Углы, меньшие прямого, называются *острыми*, а углы большие прямого, но меньшие развёрнутого, называются *тупыми.*



Углы обычно измеряют в *градусах* или *радианах*. *Один градус* (1°) – это угол, равный $\dfrac{1}{180}$ части развёрнутого угла. Для того, чтобы дать определение радианной меры угла, рассмотрим *центральный* угол AOB, т.е. угол с вершиной в центре окружности и образованный радиусами OA и OB.



Один радиан (1 рад) – это центральный угол, который опирается на дугу, равную радиусу окружности.

Из определения градуса и радиана следует, что развёрнутый угол равен 180 градусам или π радианам. Таким образом, $180^\circ = \pi$ рад.

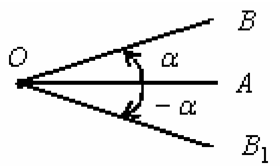
$$\text{Отсюда, } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}, \qquad 1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Формулы перехода от градусной меры угла к радианной и наоборот

Пусть угол AOB составляет α градусов и x радиан. Тогда

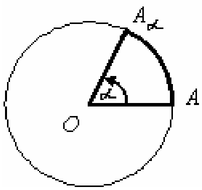
$$x = \frac{\pi}{180}\alpha \ ; \qquad \alpha = \frac{180}{\pi}x.$$

Угол как мера поворота луча.
Положительные и отрицательные углы. Углы большие 180°.



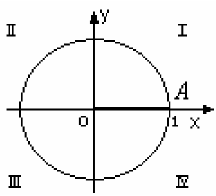
В тригонометрии рассматривают углы как меру поворота фиксированного луча, например, луча OA, вокруг его начальной точки O до некоторого заданного положения, например, OB или OB_1. При этом углы поворота луча OA против направления движения часовой стрелки считаются положительными, а по направлению движения часовой стрелки – отрицательными. Кроме того, абсолютная величина угла поворота может быть любым неотрицательным числом. Так, например, полному обороту луча OA против направления движения часовой стрелки соответствует так называемый полный угол, который содержит 360° или 2π рад. Если же луч OA совершит два полных оборота по направлению движения часовой стрелки, то мы получим угол, равный -720° или -4π рад. Таким образом, угол в указанном выше смысле может иметь своей величиной любое действительное число.

Изображение действительных чисел точками единичной окружности



Возьмём окружность радиуса 1 с центром O, отметим на ней *начальную* точку A и проведём *начальный* радиус OA. Чтобы отметить на окружности действительное число α (положительное, отрицательное или 0), надо отложить на ней от точки A дугу длиной $|\alpha|$ в положительном направлении, если $\alpha > 0$ или в отрицательном направлении, если $\alpha < 0$.

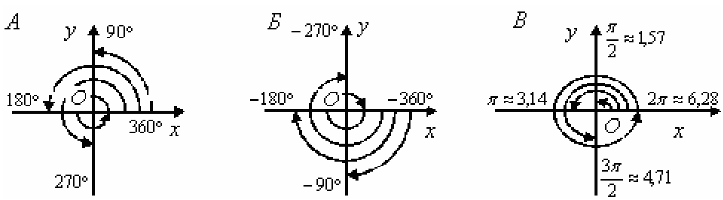
Для этого мысленно повернём OA против часовой стрелки ($\alpha > 0$) или по часовой стрелке ($\alpha < 0$) на угол радианной меры $|\alpha|$. В результате, мы получим радиус OA_α. Точка A_α и является изображением действительного числа α. Таким образом, каждому действительному числу α соответствует единственная точка A_α окружности, которая является изображением этого числа, а каждой точке окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел, которые отличаются друг от друга слагаемыми, кратными 2π. Так, например, точка A является изображением чисел $2\pi n, n \in Z$.



Замечание. Числовая окружность, т.е. окружность единичного радиуса, которая служит для обозначения действительных чисел, называется *тригонометрической* окружностью, так как её используют для определения тригонометрических функций.

Центр тригонометрической окружности при этом выбирают в начале прямоугольной декартовой системы координат Oxy, а в качестве начальной точки A выбирают точку (1; 0) Оси координат разбивают координатную плоскость Oxy на четыре четверти.

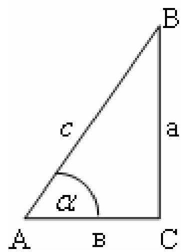
Запишем градусные (А, Б) и радианные (В) значения углов по четвертям:



Определение тригонометрических функций

1) Через прямоугольный треугольник

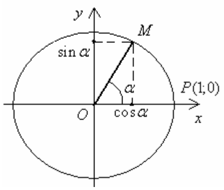
Отношения различных пар сторон прямоугольного треугольника являются функциями его острого угла, которые называются тригонометрическими.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b};\qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

2) Через единичную окружность

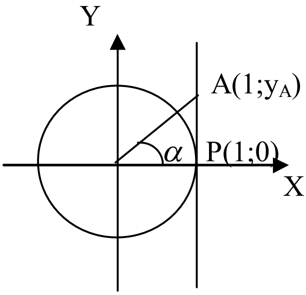


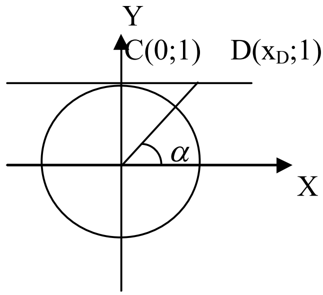
Рассмотрим тригонометрическую окружность.

Определение. Ордината точки М, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α радиан, называется синусом числа α, а абсцисса этой точки – косинусом числа α. Таким образом, $\sin\alpha = y$, где $-1 \le y \le 1$; $\cos\alpha = x$, где $-1 \le x \le 1$. Поэтому горизонтальную ось называют **осью косинусов**, а вертикальную – **осью синусов**.

Касательную PA, проходящую через точку P (1;0) параллельно оси Oy, **называют осью тангенсов,** а ординату т. A $(1{:}y_A)$ - тангенсом угла α.

Касательную CD, проходящую через точку C (0:1) параллельно оси Ox, **называют осью котангенсов**, а абсциссу точки D $(x_D;1)$ называют котангенсом угла α.





Тангенс числа α можно определить так же, как отношение синуса этого числа к его косинусу, а **котангенс** числа α, как отношение косинуса этого числа к его синусу:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента (основные тригонометрические тождества)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

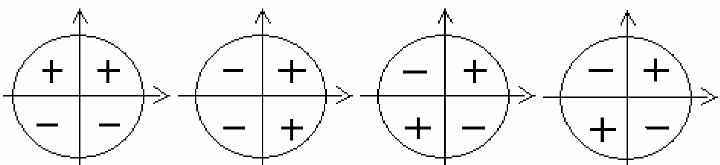
$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}; \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha = 1; \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha};$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

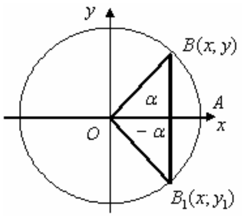
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям



$\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $\mathrm{tg}\alpha$ $\mathrm{ctg}\alpha$

Четность и нечетность тригонометрических функций



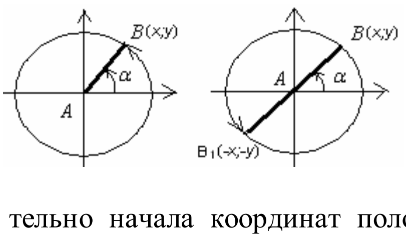
Известно, что для четной функции $f(-x) = f(x)$, а для нечетной - $f(-x) = -f(x)$.

Рассмотрим окружность радиуса $OA = 1$ и углы α и $-\alpha$. Очевидно, что абсциссы точек B и B_1 равны x, но тогда $\cos(\alpha) = x$ и $\cos(-\alpha) = x$. Следовательно, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.. Таким образом, $\cos\alpha$ есть четная функция.

Аналогично, видим, что ординаты точек B и B_1 равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки, тогда $\sin\alpha = y$, а $\sin(-\alpha) = -y$, следовательно, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ и функция $\sin\alpha$ является нечетной функцией. Нечетными также являются функции $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ в силу основных тождеств.

Периодичность тригонометрических функций

Углам α и $\alpha + 2\pi$ соответствует одно и то же положение точки B, следовательно $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi)$, а $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi)$.



Число 2π (или 360^0) является наименьшим положительным периодом этих функций.

Углам α и $\alpha + \pi$ соответствуют симметричные относительно начала координат положения точек B и B_1. И поскольку $\frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$, то $\mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha + \pi)$. Число π (или 180°) является наименьшим положительным периодом функций $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$.

Замечание 1. Если число **T** – наименьший положительный период функции, то и число **nT** ($n \in Z$) – также является периодом этой функции.

Замечание 2. Если **T** – наименьший положительный период функции *f(x),* то наименьший положительный период функции $af(kx+b)$ равен **T/ |k|.**

Таблица значений тригонометрических функций

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
		30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–

Упражнения

Пример 1.1 Найти градусную меру угла, равного 4 радианам, и радианную меру угла в 225°.

Решение:

$$4\text{ рад} = \frac{4\cdot 180^\circ}{\pi} \approx 4\cdot 57{,}3^\circ = 229{,}2^\circ; \quad 225^\circ = 225^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{4} \approx 3{,}93.$$

Пример 1.2. Исследовать на четность функции:

а) $y = x + \cos x$; **б)** $y = x^2 + x\sin x$; **в)** $y = x - \mathrm{tg}x/(x^2 - 4)$.

Решение.

а) $y(-x) = -x + \cos(-x) = -x + \cos x = -(x - \cos x) \neq y(x) \neq -y(x)$.

Это функция общего вида.

б) $y(-x)=(-x)^2+(-x)\sin(-x)=x^2+x\sin x=y(x).$

Это четная функция.

в) $y(-x)=-x-\mathrm{tg}(-x)/((-x)^2-4)=-x+\mathrm{tg}x/(x^2-4)=-(x-$

$-\mathrm{tg}x/(x^2-4))=-y(x)$. Это нечетная функция.

Пример 1.3. Найти наименьший положительный период функций.

а) $y=\cos(\frac{4}{3}x-\frac{\pi}{4});$ **б)** $y=2tg(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3});$ **в)** $y=\sin(\frac{\pi}{6}-3x).$

Решение.

а) $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{4/3}=\frac{3\pi}{2};$ **б)** $\mathrm{T}=\frac{\pi}{|-1/2|}=2\pi;$ **в)** $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{|-3|}=\frac{2\pi}{3}.$

Пример 1.4. Вычислить **а)** $\cos 1845^\circ;$ **б)** $\mathrm{tg}585^\circ;$ **в)** $\sin\frac{5\pi}{6}.$

Решение. а) $\cos 1845^\circ=\cos(5\cdot 360^\circ+45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2};$

б) $tg585^\circ=tg(3\cdot 180^\circ+45^\circ)=tg45^\circ=1;$

в) $\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}.$

Пример 1.5. Найдите области значений функций

а) $y=\cos x-5;$ **б)** $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x;$ **в)** $y=-3\sin(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3})-3;$

Решение.

а) $-1\le\cos x\le 1;$ $-1-5\le\cos x-5\le +1-5;$

$-6\le\cos x-5\le -4;$ $\mathrm{E}(y)=[-6;-4].$

б) $y=2\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)=$

$=2(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6}).$

Т.к, $-1\le\sin(x+\frac{\pi}{6})\le 1,$ то $-2\le 2\sin(x+\frac{\pi}{6})\le 2$. $\mathrm{E}(y)=[-2;2].$

в) $-1\le\sin(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3})\le 1;$ $3\ge -3\sin(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3})\ge -3;$

$$-3 \le -3\sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) \le 3; \qquad -3-3 \le -3\sin(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3}) - 3 \le 3-3;$$

$$-6 \le -3\sin(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3}) - 3 \le 0; \qquad \mathrm{E}(y) = [-6;0]$$

Пример 1.6. Используя монотонность тригонометрических функций сравнить:

а) $\sin\frac{14\pi}{5}$ и $\sin\frac{17\pi}{5}$; **б)** $\cos 4$ и $\cos 5$; **в)** $\mathrm{ctg}101^\circ$ и $\mathrm{ctg}100^\circ$.

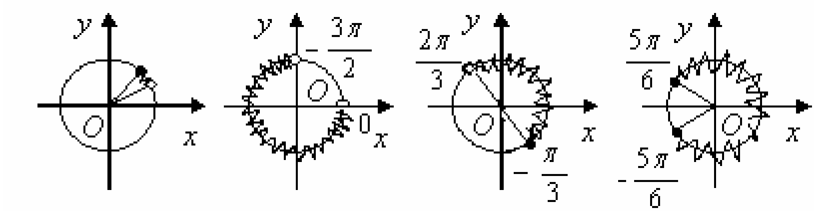
Решение. а) $\alpha_1 = \frac{14\pi}{5} = 2\pi + \frac{4\pi}{5} -$ угол во II-й четверти, а $\alpha_2 = \frac{17\pi}{5} = 3\pi + \frac{2\pi}{5} -$ угол в III-й четверти. Функция $\sin x$ является убывающей в промежутке $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$, следовательно, из условия $\alpha_2 > \alpha_1$ следует, что $\sin\alpha_2 < \sin\alpha_1$, т.е. $\sin\frac{17\pi}{5} < \sin\frac{14\pi}{5}$.

б) $\alpha_1 = 4 -$ угол в III-й четверти, а $\alpha_2 = 5 -$ угол в IV-й четверти. $\cos\alpha$ возрастает в промежутке $\alpha \in (\pi; 2\pi)$, тогда из условия $5 > 4$ следует, что $\cos 5 > \cos 4$.

в) Поскольку функция $\mathrm{ctg}x$ является убывающей в промежутке $(\pi n; \pi + \pi n)$, то $\mathrm{ctg}101^\circ < \mathrm{ctg}100^\circ$, т.к. $101^\circ > 100^\circ$.

Пример 1.7 На единичной окружности отметить дуги, соответствующие указанным условиям:

$$\frac{\pi}{6} < \alpha \le \frac{\pi}{4}; \qquad -\frac{3\pi}{2} < \alpha < 0; \qquad -\frac{\pi}{3} \le \alpha < \frac{2\pi}{3}; \qquad |\alpha| \le \frac{5\pi}{6}.$$



Пример 1.8 Найти область определения функции.

а) $y = \dfrac{\sqrt{|-x-2|}}{\mathrm{tg}x - \sqrt{3}}$. **Решение**: $\begin{cases} \mathrm{tg}\, x \neq \sqrt{3}, \\ \cos x \neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$

б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{4x-7}{\sqrt{-\cos x}}}$. **Решение**: $-\cos x > 0 \Rightarrow \cos x < 0$, тогда

$$\pi/2 + 2\pi n < x < 3\pi/2 + 2\pi n.$$

Пример 1.9 Определить знак выражения:

$$\sin 67^\circ \cdot \cos 267^\circ \cdot \cos 375^\circ \cdot \sin(-68)^\circ \cdot \cos(-68)^\circ \cdot \sin 2.$$

Решение. Определив знаки данных функций в четвертях, а также используя тот факт, что $\sin 2 \approx \sin(2 \cdot 57{,}3^\circ) \approx \sin 114{,}6^\circ > 0$, укажем знаки каждого сомножителя:

$$\begin{pmatrix} "+" \\ I \text{ чет} \end{pmatrix} \mathrm{X} \begin{pmatrix} "-" \\ III \text{ чет} \end{pmatrix} \mathrm{X} \begin{pmatrix} "+" \\ I \text{ чет} \end{pmatrix} \mathrm{X} \begin{pmatrix} "-" \\ IV \text{ чет} \end{pmatrix} \mathrm{X} \begin{pmatrix} "+" \\ IV \text{ чет} \end{pmatrix} \mathrm{X} \begin{pmatrix} "+" \\ II \text{ чет} \end{pmatrix}.$$

Число отрицательных множителей четное, следовательно,

$$\sin 67^\circ \cdot \cos 267^\circ \cdot \cos(360^\circ + 15^\circ) \cdot \sin(-68)^\circ \cdot \cos(-68)^\circ \cdot \sin 2 > 0.$$

Пример 1.10 Найти $\mathrm{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -1/8$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Решение. Используя основные тождества, получим: $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \dfrac{1}{64}} = -\dfrac{\sqrt{63}}{8}$. Знак «–» выбрали из условия принадлежности угла α третьей четверти, где функция $\cos\alpha < 0$, тогда $\mathrm{tg}\alpha = -\dfrac{1}{8} : \left(-\dfrac{\sqrt{63}}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{63}}{63}$.

Пример 1.11 Найти значение выражения $A = \dfrac{\cos\alpha + \mathrm{ctg}\alpha}{1 + \sin\alpha}$,

если $-2/\pi < \alpha < 0$ и $\cos\alpha = 1/2$.

Решение. Упростим выражение

$$A = \frac{\cos\alpha + \mathrm{ctg}\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(\sin\alpha + 1)}{\sin\alpha(1 + \sin\alpha)} = \frac{1/2}{-\sqrt{1 - 1/4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример 1.12 Найти значение $B = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}2.$

Решение. Упростим: $B = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

Возведем в квадрат обе части равенства $\sin\alpha + \cos\alpha = = 1{,}2$:

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1{,}44;$$

$\sin\alpha \times \cos\alpha = \dfrac{1{,}44 - 1}{2} = 0{,}22.$ Тогда $B = \dfrac{1}{0{,}22} = \dfrac{50}{11} = 4\dfrac{6}{11}$.

Пример 1.13 Доказать тождество: $\dfrac{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + 1}{\mathrm{tg}\alpha - 1}$.

Решение. Используя формулу $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, преобразуем левую часть тождества:

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha(\mathrm{tg}\alpha + 1)}{\cos\alpha(\mathrm{tg}\alpha - 1)} =$$

$= \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + 1}{\mathrm{tg}\alpha - 1}$. Что и требовалось доказать.

Формулы приведения

Эти формулы позволяют привести к функциям угла α функции таких углов $\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $(\pi \pm \alpha)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ и $(2\pi \pm \alpha)$.

Для облегчения запоминания формул приведения считают, что α - острый угол и используют следующие правила:

а) для углов $(2\pi \pm \alpha)$ и $(\pi \pm \alpha)$ название приводимой функции сохраняют; для углов $\left(\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ - меняют на сходственную (например, синус на косинус, тангенс на котангенс);

б) знак функции угла α определяется по знаку приводимой функции в соответствующей четверти.

Так углы вида $\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ и $(2\pi+\alpha)$ принадлежат 1–ой четверти,

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\pi}{2}+\alpha\\ \pi-\alpha\end{matrix}\right\}-\text{II четверть};\quad \left.\begin{matrix}\pi+\alpha\\ \dfrac{3\pi}{2}-\alpha\end{matrix}\right\}-\text{III четверть};\quad \left.\begin{matrix}\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\\ 2\pi-\alpha\end{matrix}\right\}\text{IY четверть.}$$

Пример 1.14 Упростить, пользуясь формулами приведения:

1) $\cos(\pi-\alpha)=\begin{bmatrix}\text{четверть II}\\ \text{назв.сохр - ся}\\ \text{знак "--"}\end{bmatrix}=-\cos\alpha$.

2) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\begin{bmatrix}\text{четверть I}Y\\ \text{назв.меняется}\\ \text{знак "--"}\end{bmatrix}=-\cos\alpha\,\cdot$

3) $\mathrm{tg}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\begin{bmatrix}\text{четверть } III\\ \text{назв.меняется}\\ \text{знак "+"}\end{bmatrix}=-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

4) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{19\pi}{2}+3\alpha\right)=\mathrm{ctg}\left(9\pi+\dfrac{\pi}{2}+3\alpha\right)=\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+3\alpha\right)=-\mathrm{tg}\,3\alpha$.

5) $\sin(1914^\circ)=\sin(360^\circ\cdot 5+114^\circ)=\sin(90^\circ+24^\circ)=\cos 24^\circ$.

6) $\cos(-1560^\circ)=\cos 1560^\circ=\cos(360^\circ\cdot 4+120^\circ)=\cos 120^\circ=$

$=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\dfrac{1}{2}$.

Формулы сложения углов

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}..$$

Пример 1.15

Вычислить не пользуясь таблицами и калькулятором $\sin 105^\circ$.

Решение. $\sin(105^\circ) = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ +$

$$+\sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Пример 1.16 Найти $\cos(60^\circ - \alpha)$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\alpha \in \mathrm{IY}$ четверти.

Решение. $\cos(60^\circ - \alpha) = \cos 60^\circ \cdot \cos\alpha + \sin 60^\circ \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha +$

$+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$, $\quad \cos\alpha = +\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = +\frac{5}{13}$, т.к. $\alpha \in \mathrm{IY}$ четверти.

Тогда $\cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{12}{13} = \frac{5-12\sqrt{3}}{26}$.

Пример 1.17 Доказать тождество не пользуясь таблицами и калькулятором: $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.

Решение. В левой части приведем дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}(\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ)}{\frac{1}{2}\cdot 2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = 4\frac{(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ} =$$

$$= 4\frac{\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = 4\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4.$$ Тождество доказано.

Пример 1.18 Доказать, что $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$.

Решение. $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta) = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right)$

$(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta) = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + \dfrac{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)}(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta) =$

$= \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + 1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta = 1$, что и требовалось доказать.

Тригонометрические функции двойных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha); \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha).$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Пример 1.19 Вычислить не пользуясь таблицами и калькулятором значения выражений A и B, если:

$$A = \sin 75^\circ\cdot\sin 15^\circ, \quad B = \sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ.$$

Решение.

$$A = \sin 75^\circ\cdot\sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ)\cdot\sin 15^\circ = \cos 15^\circ\cdot\sin 15^\circ =$$

$$= \frac{2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$B = \sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ = \sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ\cdot\frac{2\cos 18^\circ}{2\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ}\cdot\frac{2}{2} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - 18^\circ)}{4\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}.$$

Пример 1.20 Найти $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$, если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ и $\cos\alpha = 5/13$.

Решение. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{169}$.

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{169-25}{169}} = -\frac{12}{13}$; $\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}$.

Пример 1.21 Найти $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 1/2$.

Решение. Преобразуем, $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha =$
$= (\sin^2\alpha)^2 + 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Равенство $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ возведем в квадрат:

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$; $1 - \frac{1}{4} = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

или $\sin\alpha\cos\alpha = 3/8$. Тогда $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= 1 - 2\cdot(3/8)^2 = 23/32$.

Произведение, сумма и разность тригонометрических функций

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\qquad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Для преобразования выражения $a\sin\alpha+b\cos\alpha$, где a и b произвольные действительные числа не равные нулю, используют формулу.

$$a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\varphi),$$

где φ определяется из любого условия:

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \textit{или}\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\quad \text{или } \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

Пример 1.22 Доказать, что

$$(\sin160^\circ+\sin40^\circ)(\sin140^\circ+\sin20^\circ)+$$

$$+(\sin50^\circ-\sin70^\circ)\,(\sin130^\circ-\sin110^\circ)=1.$$

Решение. Применяя известные формулы суммы и разности, получим:

$$2\sin100^\circ\cos60^\circ2\sin80^\circ\cos60^\circ+2\sin(-10^\circ)\cos60^\circ2\sin10^\circ\cos120^\circ=$$

$$=4\sin100^\circ\frac{1}{2}\sin80^\circ\cdot\frac{1}{2}-2\sin^2 10^\circ\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\sin100^\circ\sin80^\circ+\sin^2 10^\circ=\frac{1}{2}(\cos20^\circ-\cos180^\circ)+\sin^2 10^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\cos20^\circ+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\cos20^\circ)=1,$$ что и требовалось доказать.

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

При решении различных тригонометрических задач часто возникает необходимость выразить все четыре тригонометрические функции $(\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\alpha)$ через тангенс половинного аргумента.

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \quad ,$$

где $\alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad k \in Z$;

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ и } \alpha \neq \pi + 2\pi\, l, \quad n, l \in Z\ ;$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \pi m, \ m \in Z\ .$$

П р и м е р 1.23 Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{p}{q}$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

Решение. $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,p/q}{1+p^2/q^2} = \dfrac{2pq^2}{q(q^2+p^2)} = \dfrac{2pq}{q^2+p^2}$;

$$\cos 2\alpha = \frac{1-p^2/q^2}{1+p^2/q^2} = \frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}.$$

П р и м е р 1.24 Найти $\cos 2\alpha$, если известно, что $2\,\mathrm{ctg}^2\alpha + 7\,\mathrm{ctg}\,\alpha + 3 = 0$ и α удовлетворяет неравенствам:

а) $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < \dfrac{7\pi}{4}$; б) $\dfrac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Пусть $\mathrm{ctg}\,\alpha = t$, тогда $2t^2 + 7t + 3 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -3, \\ t_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{ctg}\,\alpha = -3, \\ \mathrm{ctg}\,\alpha = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}, \\ \mathrm{tg}\,\alpha = -2. \end{array}\right. .$$

а) если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$, то $\alpha \in IV$ четверти, где $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Тогда $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$ или $-\infty < \operatorname{tg}\alpha < -1$. Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha = -2$ и $\cos 2\alpha = \frac{1-(-2)^2}{1+(-2)^2} = -\frac{3}{5}$.

б) если $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$, то $-1 < \operatorname{tg}\alpha < 0$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\cos 2\alpha = \frac{1-(-1/3)^2}{1+(1/3)^2} = \frac{4}{5}$.

Формулы тройных аргументов

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Пример 1.25 Преобразовать в произведение

$$A = \sin^3\alpha\cos 3\alpha + \cos^3\alpha\sin 3\alpha.$$

Решение. $A = \sin^3\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + \cos^3\alpha(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) =$

$= 4\sin^3\alpha\cos^3\alpha - 3\sin^3\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^3\alpha -$

$- 4\cos^3\alpha\sin^3\alpha = -3\sin^3\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^3\alpha =$

$= 3\sin\alpha\cos\alpha(-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \cos 2\alpha\cdot\frac{3}{2}\cdot\sin 2\alpha =$

$= \frac{3}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \frac{3}{4}\sin 4\alpha.$

Упражнения

А. Преобразования тригонометрических выражений

Преобразовать в произведение:

1. $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}\right)$.

Доказать тождество:

2. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$.

3. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 3\beta}{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\beta} = \dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 3\beta}$.

4. $3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 128\sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha$..

Упростить выражение:

5. $\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha$.

6. $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha+\pi)$.

Доказать тождество:

7. $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)} = 1$. **8**. $\dfrac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-4\alpha\right)} = -1$.

9. Упростить $\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}\right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2$. при

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$:

10. Упростить $\sqrt{\left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha\right)\cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2$. при $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$:

Упростить выражение:

11. $1 - \dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

12. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha}$.

Доказать тождество:

13. $8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = \cos 4\alpha$. **14.** $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8\sin^4\alpha$

Ответы. **1**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$. **5.** $\sin^2\alpha$. **6**. $-1-\cos^2\alpha$. **9**. 0. **10**. 0.

11. $\dfrac{1}{2\cos^2\alpha}$. **12.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}2\alpha$..

Б. Вычисление значений тригонометрических выражений

Вычислить

1. $\mathrm{tg}615^\circ+\mathrm{tg}735^\circ$.

2. $\mathrm{ctg}\dfrac{25}{12}\pi-\mathrm{ctg}\dfrac{17}{12}\pi$.

3. $\mathrm{tg}435^\circ-\mathrm{tg}195^\circ$.

4. $\mathrm{ctg}\dfrac{13}{12}\pi+\mathrm{ctg}\dfrac{5}{12}\pi$.

5. Найти $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=1/3$. **6.** Найти $\mathrm{tg}2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=1/2$.

Вычислить

7. $16\sin 10^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\cos 20^\circ$. **8.** $8\cos\dfrac{7\pi}{18}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{\pi}{18}$.

Ответы 1. 4; **2**. $2\sqrt{3}$; **3**. $2\sqrt{3}$; **4**. 4; **5**. $\dfrac{7}{9}$.; **6**. $\dfrac{4}{3}$; **7.** 1; **8**. $\sqrt{3}$.

Вычислить

1. $A=\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$.

2. Найти $\mathrm{ctg}2\alpha$, если известно, что $\sin(\alpha-90^\circ)=-\dfrac{2}{3}$, $270^\circ<\alpha\le 360^\circ$.

3. Вычислить $\dfrac{2}{3+4\cos 2\alpha}$, если $\mathrm{ctg}\alpha=5$.

4. Найти $\mathrm{tg}^2 2\alpha$, если $\sin\alpha=-2/\sqrt{11}$.

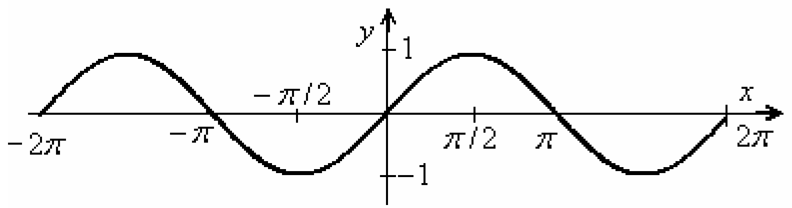
5. Найти $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha\le\dfrac{1}{8}$, $\cos\alpha\le-\dfrac{3}{4}$.

Ответы. 1. $\dfrac{1}{8}$. **2**. $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$. **3.** $\dfrac{26}{87}$. **4**. $\dfrac{112}{9}$. **5**. $\pm\sqrt{7}$.

§ 2 Тригонометрические функции, их свойства и графики

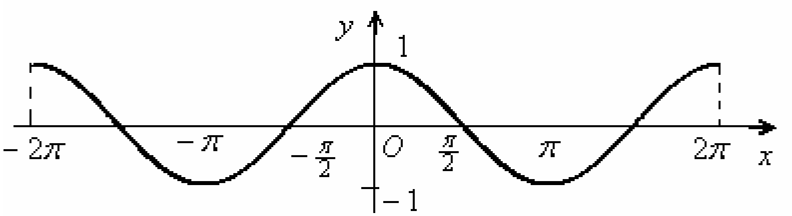
I Функция $y = \sin x$.

1) Область определения $D(y) = R$.
2) Область значений $E(y) = [-1;1]$.
3) Функция периодическая, наименьший положительный период $T = 2\pi$.
4) Нечетная функция.
5) Нули функции: $x = \pi n, \quad n \in Z$.
6) Функция положительная для $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n),\ n \in Z$ и отрицательная для $x \in (-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n),\ n \in Z$.
7) Функция возрастает на промежутках $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n],\ n \in Z$ и убывает на промежутках $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n],\ n \in Z$.
8) Точки максимума: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ и точки минимума: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.
9) Функция дифференцируема для всех $x \in R$: $(\sin x)' = \cos x$.
10) График функции называют синусоидой.



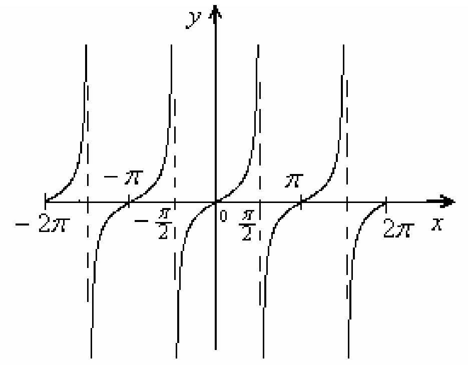
II **Функция** $y = \cos x$.

1) Область определения $D(y) = R$.
2) Область значений $E(y) = [-1;1]$.
3) Функция периодическая, наименьший положительный период $T = 2\pi$.
4) Функция четная.
5) Нули функции: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$.
6) Функция положительная для $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n),\ n \in Z$ и отрицательная для $x \in (+\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n),\ n \in Z$.
7) Функция возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n],\ n \in Z$ и убывает на промежутках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in Z$.
8) Точки максимума: $x = 2\pi n,\ n \in Z$ и минимума: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.
9) Функция дифференцируема для всех $x \in R$: $(\cos x)' = -\sin x$.
10) График функции называют косинусоидой.



III Функция $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения $D(y) = \{x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\}$.
2) Область значений $E(y) = R$. Таким образом, тангенс – функция неограниченная.
3) Периодическая функция, наименьший положительный период $T = \pi$.



4) Нечетная функция.
5) Нули функции: $x = \pi n, \quad n \in Z$.
6) Функция положительная для всех $x \in (\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n),\ n \in Z$ и отрицательная для $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi n),\ n \in Z$.

7) Возрастает на промежутках $(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n), n \in Z$.

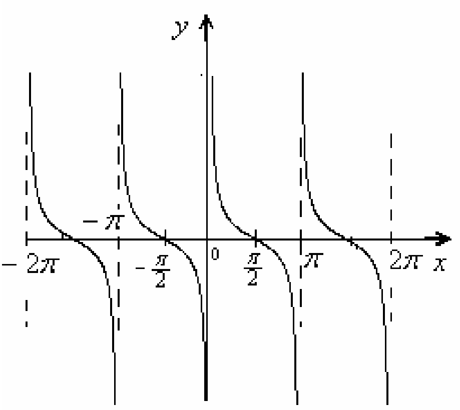
8) Экстремумов нет.

9) Дифференцируема для всех $x \in D(y)$: $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

10) График функции называют тангенсоидой.

IY Функция $y = \operatorname{ctg} x$.

1) Область определения $D(y) = \{x \neq \pi n,\ n \in Z\}$.
2) Область значений $E(y) = R$.
3) Периодическая функция, наименьший положительный период $T = \pi$.
4) Нечетная функция.
5) Нули функции: $x = \pi / 2 + \pi n, \quad n \in Z$.



6) Положительна для всех $x \in (\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n),\ n \in Z$ и отрицательна для $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi n),\ n \in Z$.

7) Функция убывает на промежутках $(\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$.

8) Экстремумов нет.

9) Функция дифференцируема для всех $x \in D(y)$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

10) График функции называют котангенсоидой.

§3 Обратные тригонометрические функции

Рассмотрим задачу о нахождении угла по известному значению его тригонометрической функции.

Например, найти значение угла α, если $\sin\alpha = \sqrt{2}/2$.

Углов, синус которых равен $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ бесчисленное множество: это и $\dfrac{\pi}{4}$, и $\dfrac{3\pi}{4}$, и $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{9\pi}{4}$, и $\dfrac{3\pi}{4} + 4\pi = \dfrac{19\pi}{4}$ и т.д. Значит, решение этой задачи не является однозначным.

Упростим её и выберем один, ближайший к нулю промежуток углов $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, где функция $\sin\alpha$ монотонно возрастает, принимая все свои возможные значения от -1 до 1.

Теперь на выбранном промежутке находится лишь одно значение угла $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, синус которого равен $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Это значение называют арксинусом числа $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и записывают: $\alpha = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Определение 1. Арксинусом числа a называют угол α (число) из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, где $|a|\le 1$.

Это определение можно записать в виде: $\alpha = \arcsin a \Leftrightarrow \sin\alpha = a$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 3.1 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, т. к. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Определение 2. Арккосинусом числа a называют угол α (число) из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен a, где $|a|\le 1$.

Это определение можно записать в виде:

$\alpha = \arccos a \Leftrightarrow \cos\alpha = a$, и $\alpha \in [0;\pi]$.

Пример 3.2 $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, т.к $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi}{3} \in [0;\pi]$.

Определение 3. Арктангенсом числа a называют угол α (число) из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, где $a \in R$.

Согласно определению: $\alpha = \mathrm{arctg}\, a \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = a$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 3.3 $arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, т. к $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

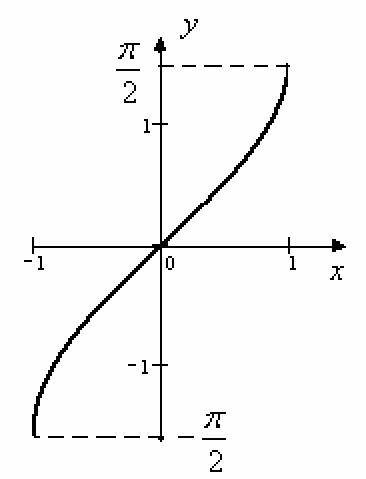
Определение 4. Арккотангенсом числа a называют угол α (число) из промежутка $(0;\pi)$, котангенс которого равен a, где $a \in R$.

Согласно определению: $\alpha = \mathrm{arcctg}\, a \Leftrightarrow \mathrm{ctg}\,\alpha = a$ и $\alpha \in (0;\pi)$.

Пример 3.4 $\mathrm{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, т.к. $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$ и $\frac{3\pi}{4} \in (0;\pi)$.

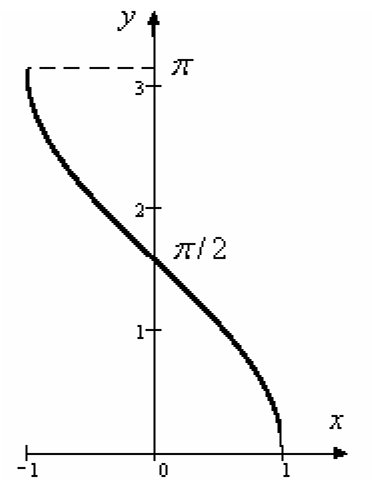
Свойства и графики обратных тригонометрических функций

I **Функция** $y = \arcsin x$.



1) Область определения $D(y) = [-1;1]$.
2) Область значений $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
3) Функция нечетная: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.
4) Нуль функции $x = 0$.
5) Функция положительна на $(0;1]$ и отрицательна на $[-1;0)$.
6) Функция возрастает на $D(y)$.
7) Экстремумов нет.
8) Дифференцируема на (-1;1), причем $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9) $\sin(\arcsin a) = a$; $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, для $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

II **Функция** $y = \arccos x$.

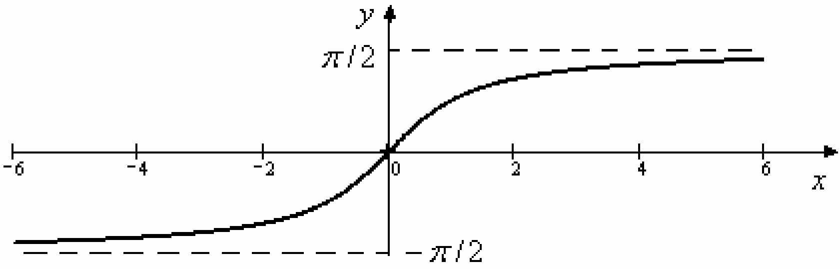


1) Область определения $D(y) = [-1;1]$.
2) Область значений $E(y) = [0;\pi]$.
3) Функция общего вида: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.
4) Нуль функции $x = 1$.
5) Функция положительна на $[-1;1)$.
6) Функция убывает на $D(y)$.
7) Экстремумов нет.

8) Дифференцируема на (-1;1): $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9) $\cos(\arccos a) = a, \qquad \arccos(\cos\alpha) = \alpha$ для $\alpha \in [0;\pi]$.

III Функция $y = \operatorname{arctg} x$.



1) Область определения $D(y) = R$.
2) Область значений $E(y) = \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.
3) Нечетная функция: $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.
4) Нуль функции $x = 0$.
5) Функция положительна на $(0;\infty)$ и отрицательна на $(-\infty;0)$.
6) Функция возрастает на $D(y)$.
7) Экстремумов нет.
8) Дифференцируема на $D(y)$: $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
9) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$, для $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

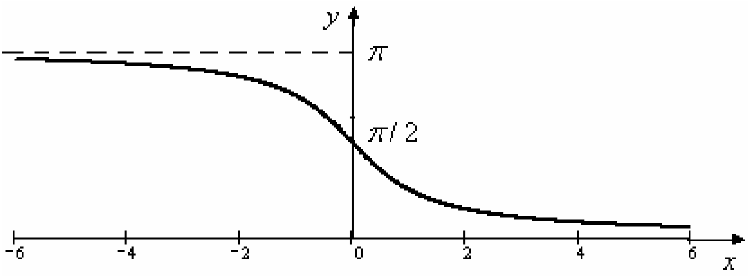
IY Функция $y = \operatorname{arcctg} x$.

1) Область определения $D(y) = R$.
2) Область значений $E(y) = (0;\pi)$.
3) Функция общего вида: $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.
4) Нулей нет.
5) Функция положительна на R.
6) Функция убывает на $D(y)$.

7) Экстремумов нет.

8) Дифференцируема на R: $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

9) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$; $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha$, для $\alpha \in (0;\pi)$.



Пример 3.5 Вычислить: $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}\right)$.

Решение

Пусть $\arcsin\dfrac{5}{13} = x$, тогда $\sin x = \dfrac{5}{13}$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

Пример 3.6 Вычислить а) $\arcsin\left(\sin\dfrac{10\pi}{3}\right)$; б) $\arccos(\cos 7)$.

Решение

а) Так как $\dfrac{10\pi}{3}$ не принадлежит отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то нельзя сразу применить формулу $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$. Нужно заменить $\sin\dfrac{10\pi}{3}$ на синус аргумента, принадлежащего отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. По свойствам синусов:

$$\sin\frac{10\pi}{3}=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно,

$$\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right)=\arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

б) $\arccos(\cos 7)=\arccos(\cos(7-2\pi))=7-2\pi$, т.к. $0<7-2\pi<\pi$.

Упражнения

1. Вычислить

а) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

в) $\frac{2}{\pi}\arcsin(-1)+\frac{6}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3}{\pi}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}0$.

2. Вычислить

а) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)$; в) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

г) $\operatorname{tg}(\pi+\arcsin(-0{,}5))$; д) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\arccos(-1)\right)$;

е) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; ж) $\sin(3\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$; з) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Вычислить

а) $\arcsin(\sin(-4))$; б) $\arccos(\cos 4)$; в) $\arcsin(\cos 5)$.

Ответы. **1**. а) $\frac{11\pi}{12}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) -2. **2**. а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) 1; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) 0; з) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3**. а) $4-\pi$; б) $2\pi-4$; в) $5-3\pi/2$.

§4 Тригонометрические уравнения

Тригонометрическим называется уравнение, в которое неизвестное входит под знак тригонометрической функции.

I. Простейшие тригонометрические уравнения

1) Уравнения вида $\sin x = a$.

Это уравнение имеет решение при $|a| \le 1$, которое выражается формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad \text{где} \quad n \in Z, \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}.$$

При условии $|a| > 1$ уравнение не имеет решений.

Частные случаи:

1) $\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z;$ **2)** $\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$

3) $\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$

2) Уравнения вида $\cos x = a$.

Это уравнение так же имеет решение только в случае $|a| \le 1$, которое выражается оно формулой

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \; n \in Z \qquad \text{и} \qquad 0 \le \arccos a \le \pi$$

Если $|a| > 1$, то это уравнение не имеет решений.

Частные случаи:

1) $\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$ **2)** $\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z;$

3) $\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$

4) $\cos x = -b$, где $b \in (0;1)$, $\quad x = \pm(\pi - \arccos b) + 2\pi n, \; n \in Z$.

3) Уравнение вида $\operatorname{tg} x = a$.

Это уравнение имеет решение для любых значений a, которое выражается формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z, \qquad \text{где } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}.$$

4) Уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$.

Это уравнение имеет решение для любых значений a, которое выражается формулой

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z, \qquad \text{где } 0 < \operatorname{arcctg} a < \pi.$$

Пример 4.1 Решить уравнение $\mathrm{tg}(3x+45^\circ)=-\sqrt{3}$.

Решение. Это уравнение сводится к простейшему при помощи замены $3x+45^\circ=y$. Тогда $\mathrm{tg}\,y=-\sqrt{3}$. $y=\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})+\pi n$,

$3x+45^\circ=-60^\circ+180^\circ n,\qquad 3x=-105^\circ+180^\circ n,$.

$x=-35^\circ+60^\circ n,\ n\in Z$.

Пример 4.2 Решить уравнение $\mathrm{ctg}(3x+\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}$.

Решение. $3x+\dfrac{\pi}{3}=\mathrm{arcctg}\sqrt{3}+\pi n$, $3x=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}+\pi n,$ тогда

$x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in Z$.

Пример 4.3 Решить уравнение $\sin\sin x=1$.

Решение. Аргументом в данном примере является функция. $\sin x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. Так как $\left|\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right|>1$ при $n\in Z$, то это уравнение не имеет решений.

II. Тригонометрические уравнения, сводимые к алгебраическим уравнениям.

При помощи замены многие тригонометрические уравнения сводятся к алгебраическим.

Следует заметить, что целые уравнения, содержащие только синусы и косинусы, имеют областью допустимых значений все множество действительных чисел R.

Пример 4.5 Решить уравнение $8\sin^2 x+6\cos x=3$.

Решение $8(1-\cos^2 x)+6\cos x-3=0$,

$8\cos^2 x-6\cos x-5=0$.

Пусть $\cos x=t$, тогда $8t^2-6t-5=0$, следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 5/4, \text{ не подходит,} \\ t_2 = -1/2. \end{array}\right.$$ Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\cos x = -\frac{1}{2}; \quad x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{2}) + 2\pi n. \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Пример 4.6 Решить уравнение $3\cos 2x = 7\sin x$.

Решение. Уравнение содержит функции с различными аргументами. Чтобы перейти к одному и тому же аргументу, применим формулу двойного угла.

$$3(1 - 2\sin^2 x) = 7\sin x \Leftrightarrow \quad 6\sin^2 x - 7\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{3}{2}, \\ \sin x = \frac{1}{3}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing, \\ x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n. \quad n \in Z. \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^n \arcsin 1/3 + \pi n, \quad n \in Z.$$

III. Способ разложения на множители

Для решения уравнений этим методом используют:

а) вынесение общего множителя за скобки;

б) группировку;

в) формулы сокращенного умножения;

г) известные тригонометрические формулы.

Пример 4.7 Решить уравнение $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$.

Для первого слагаемого применим формулу двойного угла, а для второго – понижения степени.

$$2\cos^2 2x - 1 + 1 - \cos 2x = 0,\ \cos 2x(2\cos 2x - 1) = 0.$$

1) $\cos 2x = 0,$ или 2) $\cos 2x = \frac{1}{2},$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $\qquad 2x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\ \ n \in Z;$ $\qquad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

Пример 4.8 Решить уравнение $2\sin^2(2x + \frac{\pi}{4}) + 3\sin 5x + 3\sin 3x = 1$.

Решение. $1 - \cos(4x + \frac{\pi}{2}) + 3 \cdot 2\sin\frac{5x + 3x}{2}\cos\frac{5x - 3x}{2} = 1,$

$1+\sin 4x+6\sin 4x\cos x=1$, $\sin 4x(1+6\cos x)=0$.

1) $\sin 4x=0$ или 2) $\cos x=-\dfrac{1}{6}$;

$x=\dfrac{\pi n}{4}$. $x=\pm(\pi-\arccos\dfrac{1}{6})+2\pi n,\quad n\in Z$.

IV. Однородные тригонометрические уравнения

Рассмотрим следующие однородные относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ тригонометрические уравнения:

1) $a\sin x+b\cos x=0$. 2) $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$.

3) $a\sin^3 x+b\sin^2 x\cos x+c\sin x\cos^2 x+d\cos^3 x=0$,

где $a\neq 0; b\neq 0; c\neq 0; d\neq 0$;

Сумма показателей каждого слагаемого в любом из уравнений должна быть одинаковой. Ее называют степенью однородного уравнения.

Решаются эти уравнения делением на $\cos^n(x)\neq 0$ (или $\sin^n(x)\neq 0$) обеих частей уравнения, где n – степень уравнения.

Однородные уравнения, в которых $\cos^n(x)=0$ (или $\sin^n(x)=0$) называют неполными. Их решают при помощи метода разложения на множители.

Пример 4.9 Решить уравнение $\sin^2(4{,}5\pi+x)+4\sin^2 x=2\sin 2x$.

Решение: $\sin^2(4\pi+\dfrac{\pi}{2}+x)+4\sin^2 x-4\sin x\cos x=0$,

$\cos^2 x-4\sin x\cos x+4\sin^2 x=0$;

$(\cos x-2\sin x)^2=0$;

$2\sin x-\cos x=0$ – однородное уравнение 1-ой степени, разделим на $\cos x$.

$\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{2}$. X= $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

Пример 4.10 .Решить уравнение $3\cos^2 x=\sin^2 x+\sin 2x$.

Решение. $\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0\quad |:\cos^2 x$

$\mathrm{tg}^2 x+2\,\mathrm{tg}\,x-3=0,\quad \mathrm{tg}\,x=t,\quad t^2+2t-3=0$,

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = -3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z, \\ x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Пример 4.11 Решить уравнение $4(1-\cos x) = 3\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}$.

Решение. $4\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2} - 3\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0$ – неполное однородное уравнение. Выносим общий множитель, $\sin\dfrac{x}{2}(8\sin\dfrac{x}{2} - 3\cos\dfrac{x}{2}) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{8}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \quad n \in Z, \\ x = 2\operatorname{arctg}\dfrac{3}{8} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{array}\right.$$

V. Тригонометрические уравнения вида:

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

Последнее уравнение сводится к однородному уравнению 2-й степени при помощи основного тригонометрического тождества. Число d представим так:

$d = d\cdot 1 = d(\sin^2 x + \cos^2 x) = d\sin^2 x + d\cos^2 x$ и, подставив в уравнение, запишем:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\sin^2 x + d\cos^2 x,$$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x - d\sin^2 x - d\cos^2 x = 0,$$

$$(a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0.$$

Получили однородное уравнение 2-ой степени.

Пример 4.12 Решить уравнение $6\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x = 2$.

Решение. $6\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$,

$4\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0 \qquad |: \cos^2 x$.

$$4\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}x-3=0,\quad 4t^2+t-3=0,\quad t_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{8},$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-1, \\ t_2=\dfrac{3}{4}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k; \\ x=\mathrm{arctg}\dfrac{3}{4}+\pi n; \end{array}\right. \quad k,\ n\in Z.$$

Первое уравнение решается различными методами:
а) сведением к однородному 2-ой степени при помощи формул двойных углов для функций $\sin x$ и $\cos x$;
б) при помощи формул, выражающих синус и косинус через тангенс половинного аргумента;
в) при помощи метода введения вспомогательного угла.

Пример 4.13. Решить уравнение $3\sin x+4\cos x=5$.

Решение.

а) Используем формулы двойных углов.

$$3\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})-5\sin^2\frac{x}{2}-5\cos^2\frac{x}{2}=0,$$

$$-9\sin^2\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0\qquad |:-\cos^2\frac{x}{2},$$

$$9\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-6\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1=0,\qquad \mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3};\qquad x=2\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z.$$

б) Выразим функции синус и косинус через тангенс половинного аргумента. $3\cdot\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+4\cdot\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=5$, где $\dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ x\neq\pi+2\pi n$,

$$9\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-6\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1=0,\qquad \mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3};\qquad x=2\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z.$$

Применение этих формул изменяет ОДЗ уравнения: возможна потеря корней ($x\neq\pi+2\pi n$ в данном случае). Поэтому необходима проверка подстановкой в исходное уравнение исключенных значений. Если при этом получим верное равенство, то исключенные значения записывают в окончательный ответ. Подставим $x=\pi$ в исходное уравнение, получим $3\sin\pi+4\cos\pi=-4\neq 5$. Следовательно, множество значений $x=\pi+2\pi n$ не является решением.

Метод введения вспомогательного угла

Пусть $a\sin x + b\cos x = c$

$$(1)$$

Составим число: $\sqrt{a^2+b^2}$. Разделим обе части уравнения на это число

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (2)$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$,

то существует угол φ, для которого

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad tg\varphi = \frac{b}{a} . \qquad (3)$$

Уравнение (2) перепишем в виде:

$$\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} . \qquad (4)$$

Тогда

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, то это уравнение имеет решение:

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n, \quad n \in Z$$

Угол φ можно найти из формул (3), тогда окончательно, решение уравнения (1) имеет вид:

$$x = (-1)^n \text{acrsin}\frac{\text{c}}{\sqrt{\text{a}^2+b^2}} - \text{arctg}\frac{b}{a} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Пример 4.14 Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 5$.

Решение. Так как $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16}$, то

$$\frac{3}{\sqrt{9+16}}\sin x+\frac{4}{\sqrt{9+16}}\cos x=\frac{5}{\sqrt{9+16}},\qquad \frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=1,$$

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=1,\ \ \sin(x+\varphi)=1,\ \ x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$$

П р и м е р 4.15 .Решить уравнение $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$.

Решение. $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$,

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2},\qquad \cos\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

В этом случае нам известно значение вспомогательного угла φ, тогда

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{1}{2},\qquad \sin(x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2},$$

$$x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\qquad x=\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z.$$

П р и м е р 4.16 . Решить уравнение $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x$.

Решение. Используя метод введения вспомогательного угла, получим: $2\sin(5x+\frac{\pi}{3})-2\sin 7x=0;\quad 2\sin\dfrac{5x+\frac{\pi}{3}-7x}{2}\cos\dfrac{5x+\frac{\pi}{3}+7x}{2}=0.$

$$\left[\begin{array}{l}\sin(\frac{\pi}{6}-x)=0,\\ \cos(\frac{\pi}{6}+6x)=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n+\frac{\pi}{6},\ \ n\in Z;\\ x=\frac{1}{6}(\frac{\pi}{2}+\pi k-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{6},\ \ k\in Z.\end{array}\right.$$

П р и м е р 4.17 . Решить уравнение $3\sin 3x-2\cos 3x=\sqrt{26}$.

Решение. $\dfrac{3}{\sqrt{13}}\sin 3x-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\cos 3x=\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}}=\sqrt{2}$.

Это уравнение не имеет решений, так как $\sqrt{2}>1$.

VI. Уравнения вида $f(\sin x \pm \cos x;\ \sin x \cdot \cos x) = 0$

Заметим, что $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin(x \pm \frac{\pi}{4})$, тогда

$\sqrt{2}\,|\sin(x \pm \frac{\pi}{4})| \le \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$. Таким образом: $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$.

Пример 4.18 Решить уравнение $3\sin x + 4\sin 2x - 3\cos x = 3$.

Решение. $3(\sin x - \cos x) + 4\cdot 2\sin x\cos x = 3$. (*)

Пусть $\sin x - \cos x = t;\quad |t| \le \sqrt{2}$. Возведем это выражение в квадрат и выразим $2\sin x\cos x$ через t.

$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2, \qquad 1 - 2\sin x\cos x = t^2,$

$1 - t^2 = 2\sin x\cos x$.

Подставим в (*) и получим:

$$3t + 4(1 - t^2) = 3 \Rightarrow 4t^2 - 3t - 1 = 0,$$

$$\left[\begin{aligned} t_1 &= 1, \\ t_2 &= -\frac{1}{4}; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \sin x - \cos x &= 1, \\ \sin x - \cos x &= -\frac{1}{4}; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) &= 1, \\ \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}\right.$$

$1)\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $2)\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

$x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n$. $\qquad x = (-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4} + \pi k, n\ \ k \in Z.$

VII. Тригонометрические уравнения с отбором корней

Пример 4.19 Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = -1$, если $x \in (0^\circ, 150^\circ)$.

Решение. $x = -15^\circ + 60^\circ n,\ n \in Z$. Произведем отбор корней, принадлежащих промежутку $(0^\circ, 150^\circ)$.

при $n = 0$ $\qquad x = -15^\circ < 0,$

при $n = 1$ $\qquad x = -15^\circ + 60^\circ = 45^\circ,$

при $n = 2$ $\qquad x = -15^\circ + 120^\circ = 105^\circ$,

при $n = 3$ $\qquad x > 150^\circ$.

Таким образом, $x = 45^\circ$; $x = 105^\circ$ принадлежат промежутку $(0^\circ;150^\circ)$.

Пример 4.20. Сколько решений уравнения $\sin^2 3x + \sin^2 5x = 1$ принадлежат промежутку $[0;\pi/2]$?

I способ.

Решение. Используя формулы понижения степени, получим

$1 - \cos 6x + 1 - \cos 10x = 2;$ $\qquad 2\cos 8x \cos 2x = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 8x = 0, \\ \cos 2x = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{8}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}. \end{array}\right. \qquad n, m \in Z.$$

Отберем корни, принадлежащие $[0;\dfrac{\pi}{2}]$. Для этого решим неравенства.

1) $0 \le \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{8} \le \dfrac{\pi}{2}$

$0 \le 1 + 2n \le 8$

$-0,5 \le n \le 3,5$

$n = 0; 1; 2; 3.$

2) $0 \le \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi n}{2} \le \dfrac{\pi}{2}$

$0 \le 1 + 2n \le 2$

$-0,5 \le n \le 0,5$

$n = 0$

Указанному промежутку принадлежат четыре корня из первого множества решений и один из второго. В ответ запишем пять корней.

II способ.

Можно решить этот пример графически.

$\mathrm{T}_{наим}(\cos 8x) = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4};$ $\qquad \mathrm{T}_{наим} = (\cos 2x) = \dfrac{2\pi}{2} = \pi.$

Построим графики функций $y_1 = \cos 8x;$ $\quad y_2 = \cos 2x.$

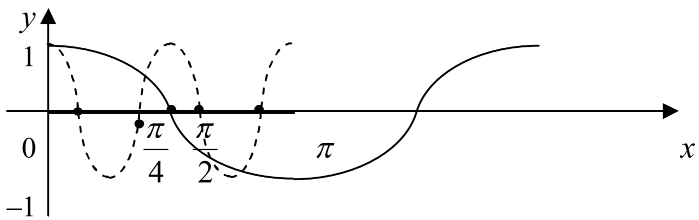


График функции y_1 на промежутке $[0;\frac{\pi}{2}]$ пересекает ось OX в четырех точках, а y_2 – в одной. Всего получим пять корней.

Пример 4.21. Сколько корней уравнения $\sin x + \cos 2x = 0$ находится на отрезке $[-\pi;3\pi]$?

Решение. Воспользуемся формулой двойного угла:

$$\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0, \qquad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 1,\\ \sin x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z;\\ x = (-1)^k\,\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z.\end{array}\right.$$

Отбор корней здесь удобно провести, используя график $y = \sin x$. Пересекая синусоиду прямыми $y_1 = 1$ и $y_2 = -1/2$, найдем число корней, принадлежащих отрезку $[-\pi;3\pi]$ (проделайте сами). Ответ: Шесть корней.

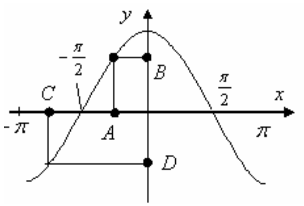
Пример 4.22 Решить уравнение $\dfrac{\cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = |\cos x|$.

Решение. ОДЗ: $x \neq -3/2$. Правая часть уравнения по определению модуля неотрицательна, левая часть обязана быть неотрицательной, чтобы выполнялось равенство. Так как знаменатель неотрицателен, то $\cos x \geq 0$, но тогда $|\cos x| = +\cos x$ и уравнение примет вид:

$$\frac{\cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = \cos x; \quad \frac{\cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} - \cos x = 0; \quad \cos x\left(\frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} - 1\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = 1,\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\\ x_1 = -\dfrac{1}{2};\quad x_2 = -2{,}5.\end{array}\right.$$

Проверим знаки $\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\cos(-2{,}5)$. Воспользуемся косинусоидой.



Значения $-1/2$ и $-2{,}5$ отметим на оси Ох. Проведя через эти точки прямые $\|$ оси Оу, найдем точки пересечения с графиком и определим на оси Оу знаки функции косинуса в этих точках. Точка А имеет абсциссу ($-1/2$). Значение $\cos(-\frac{1}{2})$ изображено точкой В оси Оу. Ее ордината положительна, следовательно, $\cos(-1/2) > 0$. Точка С имеет абсциссу ($-2{,}5$). Значение косинуса в ней изображено точкой D, ордината которой отрицательна, следовательно, $\cos(-2{,}5) < 0$. Значит $x = -2{,}5$ посторонний корень, тогда $x = -1/2$ или $x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$ есть решения данного уравнения.

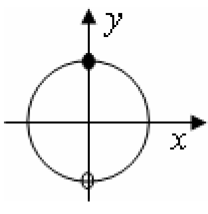
Дробно-рациональные уравнения относительно тригонометрических функций.

При решении таких уравнений используют следующие равносильные переходы.

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$ б) $f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$

Пример 4.23. Решить уравнение $\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin x} = 0.$

Решение. $\begin{cases} \cos 2x = -1; \\ \sin x \neq -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n; \\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{cases} n; k \in Z.$

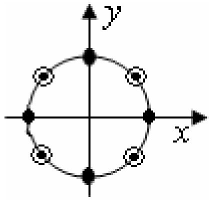


На единичную окружность нанесем точки, соответствующие полученным решениям. Отбросив (выколов) точки x второго вида, запишем окончательно: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n.$

Пример 4.24. Решить уравнение $\operatorname{tg}2x\sin 4x = 0.$

Решение.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}2x = 0; \\ \sin 4x = 0; \end{array}\right. \\ \cos 2x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{2}; \\ x = \dfrac{\pi n}{4}; \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}. \end{cases}$$



Наносим точки $x = \dfrac{\pi n}{2}$ и $x = \dfrac{\pi n}{4} (n \in Z)$ на единичную окружность, выкалываем те из них, которые удовлетворяют условию $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$ и, окончательно получаем, что $x = \dfrac{\pi n}{2}; \quad n \in Z$.

Упражнения

I Решить уравнение

1. $\cos 2x - \sin 2x = 0$. **2.** $\sin x + \sin 2x = 0$. **5.** $\dfrac{\sin 2x + \sin 6x}{1 - \sin 2x}$

3. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0.$ **4.** $\cos 3x + \cos 5x = 0$.

Ответы (всюду предполагается, что k, m, n принимают любые целые значения).

1. $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$. **2.** $\pi n, \ \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi$. **3.** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2}$.

4. $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4}$. **5.** $\dfrac{\pi n}{2}; -\dfrac{\pi}{4} + \pi n.$

II Решить уравнение

1. $(1 + \cos 4x) \cdot \sin 2x = \cos^2 2x.$ **2**. $3\sin^2 2x + 7\cos^2 2x - 3 = 0.$

3. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$ **4**. $\sin^3 x = 2\sin 2x - \sin x.$

5. $\cos 7x - \cos 4x + \cos x = 0.$ **6**. $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0.$

7. $2\cos\dfrac{x}{2} - \cos x = 1.$ **8**. $\sin 6x + \sqrt{3}\cos 6x = 2.$

9. $9\mathrm{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6.$

10. $3\sin 5x = \cos 2x - \cos 8x - \sin 15x.$

11. $\sin 2x + \cos 2x = 2\mathrm{tg}x + 1.$

12. $\sin^7 x \cdot \cos^3 x - \cos^7 x \cdot \sin^3 x = \cos 2x.$

13. $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2.$

14. Сколько решений имеет уравнение
$\sqrt{4-x^2}\left(\sin \pi x - \sqrt{3}\cos \pi x\right) = 0$? Найти эти решения.

15. Найти все корни уравнения $2|\sin x|\cos x = \sin^2 x$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

16. Найти все решения уравнения $\dfrac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right]$.

17. Найти все решения $1 - 5|\cos x| + 2\sin^2 x = 0$, если $\sin x \le 0$.

Ответы (всюду, где нет иных указаний, предполагается, что k, l, m, n принимают любые целые значения).

1. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$; $(-1)^m \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{2}$. **2**. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$. **3**. $(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$.

4. πn; $\pm \arccos\left(\sqrt{6} - 2\right) + 2\pi m$. **5**. $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4}$; $\pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$.

6. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $\mathrm{arctg}3 + \pi m$. **7**. $\pi(1 + 2n)$; $4\pi m$.

8. $\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{\pi k}{3}$. **9**. $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$. **10**. $\dfrac{\pi m}{5}$; $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{3}$; $k = 2 + 3n$,

11. $\pi n; -\dfrac{\pi}{4} + \pi m$. **12**. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$. **13**. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $\mathrm{arctg}3 + \pi m$.

14. Шесть решений $\left\{-2; -\dfrac{5}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{3}; 2\right\}$.

15. $\{0;\mathrm{arctg}2;\pi;2\pi;2\pi-\mathrm{arctg}2\}$. **16**. $\dfrac{3\pi}{4}$.

17. $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi m.$

Системы тригонометрических уравнений

При решении систем тригонометрических уравнений используются известные приёмы решения систем уравнений:

- метод замены переменной (например, $t=\sin x,\ u=\cos x$);
- метод подстановки;
- сложение, вычитание уравнений, входящих в систему и т.д.

Пример 4.25 Решить систему уравнений $\begin{cases}\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=1,\\ x+y=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

Решение: $\begin{cases}y=\pi/4-x,\\ \mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1.\end{cases}$ Решаем второе уравнение.

$\mathrm{tg}\,x+\dfrac{\mathrm{tg}(\pi/4)-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}(\pi/4)\cdot\mathrm{tg}\,x=1}$; $\mathrm{tg}\,x+\dfrac{1-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}=1.$ При $\mathrm{tg}\,x\neq-1$ $(x\neq-\pi/4+\pi k)$ имеем $\mathrm{tg}\,x(\mathrm{tg}\,x-1)=0,$ откуда

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,x=0,\\ \mathrm{tg}\,x=1,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\pi n,\\ x_2=\pi/4+\pi m.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\pi n,\\ y_1=\dfrac{\pi}{4}-x_1=\dfrac{\pi}{4}-\pi n,\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\\ y_2=\dfrac{\pi}{4}-x_2=-\pi m.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\pi n;\ \frac{\pi}{4}-\pi n\right);\quad\left(\frac{\pi}{4}+\pi m;\ -\pi m\right),\quad n,m\in Z.$$

Пример 4.26 Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x\cdot\cos y=-0{,}5, \\ \cos x\cdot\sin y=0{,}5. \end{cases}$

Решение. Сложим два уравнения, а затем вычтем из первого уравнения второе. В результате получим систему:

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\pi k, \\ x-y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n. \end{cases}$$

Сложим и вычтем уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} 2x=-\dfrac{\pi}{2}+\pi k+2\pi n, \\ 2y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k-2\pi n. \end{cases}$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k+\pi n, \qquad y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k-\pi n, \quad k,n\in Z.$$

Упражнения

Решить систему уравнений.

1) $\begin{cases} \cos^2 x+\cos^2 y=1, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=\cos x. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} \sin x+\sin y=0{,}5, \\ \sin x\cdot\sin y=-0{,}5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \cos x\cdot\sin y=1/\sqrt{2}, \\ x+y=3\pi/4. \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} \sin x\cdot\cos y=1/4, \\ 3\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y. \end{cases}$

Ответы: 1) $\left(2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi m\right)$. **2)** $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k\right)$; $\left((-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi m;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$. **3)** $\left(\pi k;\ \dfrac{3}{4}\pi-\pi k\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}-\pi n\right)$,

4) $x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}(2n+k)$, $y=\dfrac{\pi}{4}-(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}(2n-k)$.

(всюду $n,k,m\in Z$).

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

При решении уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции часто применяется переход от равенства углов к равенству тригонометрических функций этих углов. При этом расширяется область определения уравнения, поэтому возможно появление посторонних корней. Следовательно, необходима проверка полученных решений.

Рассмотрим на примерах принципы решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Пример 4.27 Решить уравнение $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3} - \arcsin x$.

Решение. Область определения задается системой двух неравенств: $|2x| \le 1$ и $|x| \le 1$, поэтому область определения $|x| \le 1/2$.

Обозначим $\arcsin x = t$, $\arcsin 2x = u$, тогда $\sin t = x$, $\sin u = 2x$. В этих обозначениях уравнение примет вид

$u = \frac{\pi}{3} - t, \quad u, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдем синус обеих частей равенства:

$\sin u = \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$.

$\sin u = \sin\frac{\pi}{3}\cos t - \cos\frac{\pi}{3}\sin t$ или, $2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$. С учетом формулы $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ имеем:

$2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}x$. Тогда $5x = \sqrt{3(1 - x^2)}$, $\quad 28x^2 = 3$. $\quad\Leftrightarrow$

$x = \pm\sqrt{\frac{3}{28}}$.

Пример 4.28 Решить уравнение $\operatorname{arctg} x = \arccos x$.

Решение. Так как $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\arccos x \in [0; \pi]$, то общая

область изменения функций $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, откуда $x > 0$. В уравнении переходим к равенству косинусов. По определению $\cos(\arccos x) = x$, а также имеем формулу $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. Получим уравнение

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = x$, $x^2(1+x^2)=1$, $x^4+x^2-1=0$. Решая биквадратное уравнение, получим $x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Т.к. $|x| \le 1$ и $x>0$, $x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Упражнения

1. Решить уравнения

1. $\arcsin(x+4)=0$. **2**. $\arccos(x-2)=\dfrac{\pi}{2}$.

3. $\arcsin(x-\sqrt{2})=0$. **4**. $\arccos(x+3)=\dfrac{\pi}{2}$.

5. $2\sin^2 3x+\cos(3x-\arcsin 1)-1=0$.

6. $3\cos 2x-2\sin(x+\arccos(-1))-3=0$.

7. $\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-2\sin^2(x-\arccos 0)=0$.

8. $\sin^2 x-2\sin x\cdot\sin(x+\arcsin 1)-3\cos^2 x=0$.

Ответы:

1 $x=-4$. **2** $x=2$. **3** $x=\sqrt{2}$. **4** $x=-3$

5. $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}$; $(-1)^k\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi k}{3}$. **6**. πn; $(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi k$.

7. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $\pi k-\mathrm{arctg}2$.. **8**. $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $\mathrm{arctg}3+\pi k$.

Всюду $k,n\in Z$.

2. Решить уравнения

1. $4\mathrm{arctg}(x^2-4x+4)=\pi$. **2**. $6\mathrm{arcctg}(3x^2+x+\sqrt{3})=\pi$.

3. $\dfrac{3}{\pi}\arccos(x^3-2x^2+3x-5{,}5)=\mathrm{tg}\left(-\dfrac{67\pi}{4}\right)$.

4. $\arcsin x=2\arccos x$. **5**. $\arcsin x\cdot\arccos x=\pi^2/18$.

6. $\arcsin x+\arccos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}$. **7**. $\arcsin x=2\mathrm{arctg}x$.

Ответы:

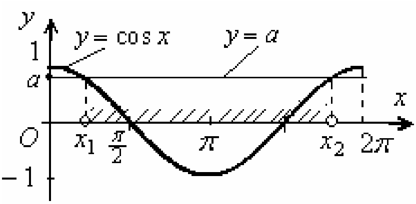
1. $\{1,\ 3\}$. **2**. $\{0,\ -1/3\}$. **3**. $\{2\}$. **4**. $\{\sqrt{3}/2\}$. **5**. $\{0{,}5\}$. **6**. $\{2/\sqrt{5}\}$. **7**. $\{-1\}$.

§5 Тригонометрические неравенства

Решение простейших тригонометрических неравенств

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся: $\sin x < a$, $\sin x > a$, $\cos x < a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x > a$.

Неравенство можно решать, используя график соответствующей функции или тригонометрический круг.

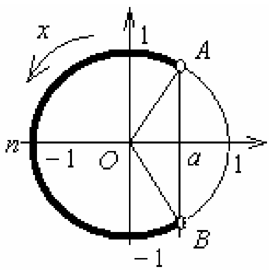


Пример 5.1 Решить неравенство $\cos x < a$.

а) Решение с использованием графиков функций $y = \cos x$ и $y = a$.

На отрезке $[0;\ 2\pi]$ длиной, равной периоду функции $y = \cos x$, строим графики функций $y = \cos x$ и $y = a$. Так как $|\cos x| \le 1$, то при $a \le -1$ неравенство $\cos x < a$ не имеет решения, при $a > 1$ неравенство верно при $-\infty < x < \infty$. Рассмотрим случай, когда $a \in (-1;\ 1]$. Корнями уравнения $\cos x = a$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ являются $x_1 = \arccos a$ и $x_2 = 2\pi - \arccos a$. На промежутке между корнями x_1 и x_2 график функции $y = \cos x$ расположен ниже прямой $y = a$, поэтому неравенство $\cos x < a$ выполняется для $x \in (x_1;\ x_2)$. В силу периодичности функции $\cos x$ такие интервалы для x повторяются через 2π, поэтому решением неравенства $\cos x < a$ является множество интервалов $x \in (\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$, $n \in Z$.

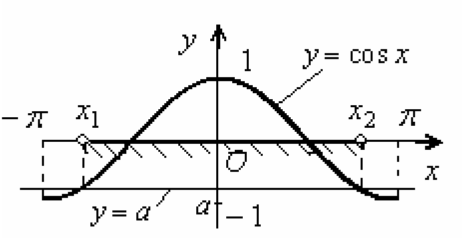
б) Решение с использованием тригонометрического круга.

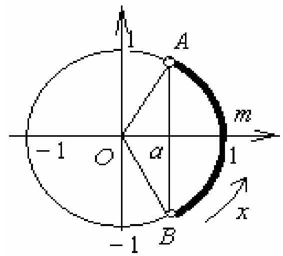


В пределах одного оборота неравенству $\cos x < a$ соответствуют углы, оканчивающиеся в секторе $OAnB$, причем $A = \arccos a$, $B = 2\pi - \arccos a$. С учетом периодичности функции $\cos x$ получим решение неравенства $x \in (\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$, $n \in Z$.

П р и м е р 5.2 Решить неравенство $\cos x > a$.

Для решения с помощью графика функции удобно использовать отрезок $[-\pi;\pi]$. Корнями уравнения $\cos x = a$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ являются $x_1 = -\arccos a$ и $x_2 = \arccos a$. На промежутке между

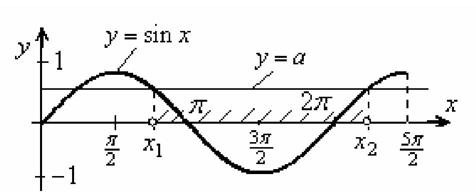




корнями x_1 и x_2 график функции $y = \cos x$ расположен выше прямой $y = a$, поэтому неравенство $\cos x > a$ выполняется для $x \in (x_1;\ x_2)$. С учетом периода запишем $x \in \left(-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

П р и м е р 5.3 Решить неравенство $\sin x < a$.

а) Решение с использованием графиков функций $y = \sin x$ и $y = a$ удобно получить в интервале $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$, длиной 2π.

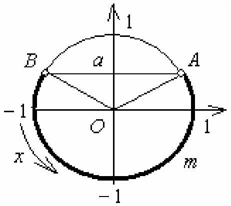


Корнями уравнения $y = \sin x$ на указанном интервале являются $x_1 = \pi - \arcsin a$, $x_2 = 2\pi + \arcsin a$. Как видно из рисунка, в интервале $(x_1;\ x_2)$ график функции $y = \sin x$ находится ниже прямой $y = a$, т.е. $\sin x < a$. Учитывая период, получим:

при $a > 1$ решение неравенства $x \in R$;

при $a \le -1$ неравенство не имеет решений ($\in \varnothing$);

при $|a| < 1$ $\quad x \in (2\pi n + \pi - \arcsin a;\ 2\pi n + 2\pi + \arcsin a)$, $n \in Z$.

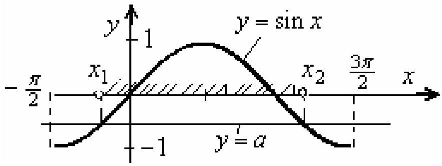


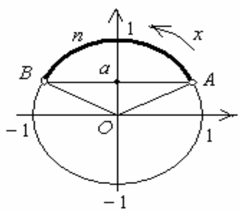
б) Решение с использованием единичного тригонометрического круга.

На оси синусов поставим точку $-1 < a < 1$. Неравенству соответствуют углы, оканчивающиеся в секторе $OBmA$, причем $B = \pi - \arcsin a$, $A = 2\pi + \arcsin a$. Решение записывается так же, как в случае а).

Пример 5.4 Решить неравенство $\sin x > a$.

Решение с использованием графиков функций $y = \sin x$ и $y = a$ удобно получить в интервале $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ длиной 2π. На тригонометрическом круге неравенству соответствуют углы, оканчивающиеся в секторе $OAnB$, причем $x_1 = A = \arcsin a$, $x_2 = B = \pi - \arcsin a$. При $-1 < a < 1$ решение неравенства $x \in (\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n)$, $n \in Z$.





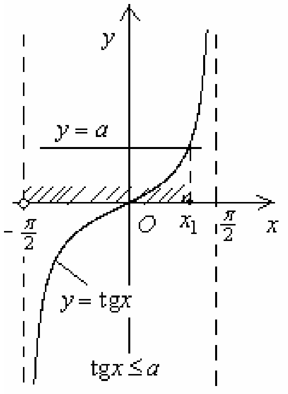
Пример 5.5 Решить неравенство $\mathrm{tg}x \le a$, $-\infty < a < \infty$.

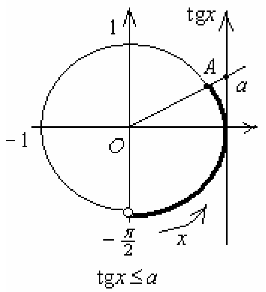
Решение неравенств с тангенсом также можно получить с использованием графиков функции $y = \mathrm{tg}x$ и $y = a$ или с помощью тригонометрического круга. Решение показано на рисунках ниже, где $x_1 = A = \mathrm{arctg}a$. С учетом периодичности тангенса и области его определения, получим: $n\pi - \dfrac{\pi}{2} < x \le \mathrm{arctg}a + n\pi, \quad n \in Z$.

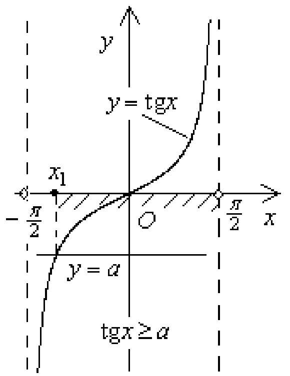
Пример 5.6 Решить неравенство $\mathrm{tg}x \ge a$, $-\infty < a < \infty$.

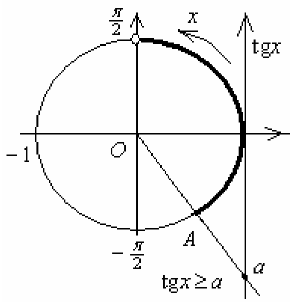
Решение показано на рисунках ниже. С учетом периодичности тангенса и области его определения, получим:

$$\mathrm{arctg}a + n\pi \le x < \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z.$$









Основные приемы решения тригонометрических неравенств

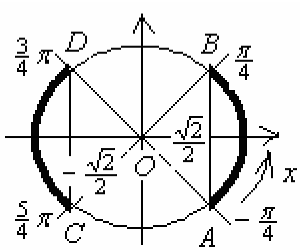
При решении более сложных тригонометрических неравенств используются два основных приёма:

1. Данное неравенство с помощью эквивалентных преобразований сводится к простейшим тригонометрическим неравенствам. В процессе преобразований
можно использовать те же приемы, что и при решении тригонометрических уравнений.
2. Применяется метод интервалов для определения числовых промежутков, в которых содержатся решения неравенства $f(x) > 0$. Для этого сначала решается соответствующее тригонометрическое уравнение $f(x) = 0$, определяются промежутки знакопостоянства с учетом ОДЗ неравенства. Зная период T функции $f(x)$, можем для

определения интервалов знакопостоянства выбрать любой отрезок её области определения $[x_0;\ x_0+T]$. Удобнее всего началом интервала положить $x_0=0$, если точка x_0 является корнем $f(x)$ или ближайший от нуля корень. Составляя таблицу, определяем знаки сомножителей в полученных интервалах (см. пример 5.9).

Пример 5.7 Решить неравенство $\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Так как косинус – функция четная, неравенство запишем $\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть $x-\frac{\pi}{3}=y$, тогда $|\cos y|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это неравенство эквивалентно двум неравенствам: $\cos y\ge\sqrt{2}/2$ и $\cos y\le-\sqrt{2}/2$, которые выполняются в секторах OAB и ODC (см. рисунок). Решение можно записать в виде:



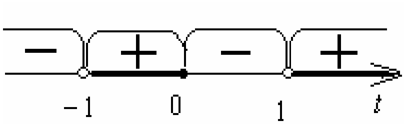
$y\in\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in Z$. С учетом того, что углы $\angle BOC$ и $\angle AOD$ - развернутые, решение запишем в виде: $y\in\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n\in Z$.

Возвращаясь к замене, получим $-\pi/4+\pi n\le x-\pi/3\le\pi/4+\pi n$.

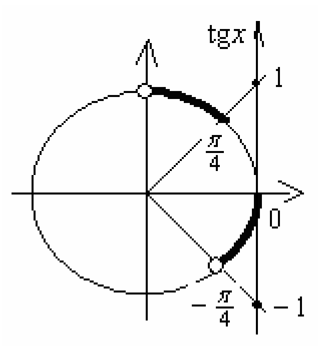
$$\frac{\pi}{12}+\pi n\le x\le\frac{7\pi}{12}+\pi n,\quad n\in Z.$$

Пример 5.8 Решить неравенство $2\mathrm{tg}2x\le3\mathrm{tg}x$.

Решение. Перейдем к одному аргументу используя формулу $\mathrm{tg}2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$, затем обозначим $\mathrm{tg}x=t$. Получим алгебраическое



неравенство $\frac{4t}{1-t^2}\le3t$, которое преобразуем к виду



$\frac{t(3t^2+1)}{(t-1)(t+1)} \geq 0$. Решаем неравенство методом интервалов. Получим совокупность двух простейших неравенств: $-1 < \mathrm{tg}x \leq 0$ или $\mathrm{tg}x > 1$.

$-\frac{\pi}{4} + \pi n < x \leq \pi n$; $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

П р и м е р 5.9 Решить неравенство $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$.

Решение. Так как $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, то

$(\cos x - \sin x) - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) > 0$;

$(\cos x - \sin x)((\cos x + \sin x) - 1) < 0$. С учетом формул

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

неравенство примет вид $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) < 0$.

Для решения неравенства используем метод интервалов. Для этого обозначим

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Решим уравнение $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x_1 = 2\pi n, \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Период функции $f(x)$: $T = 2\pi$, поэтому можно исследовать $f(x)$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$. На этом отрезке находятся 5 корней функции $f(x)$: $x = 0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{4};\ 2\pi$. Для определения знака $f(x)$ в интервалах между корнями построим таблицу 2.

Таблица 2- Знаки функции $f(x)$

	$\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{2};\ 2\pi\right)$
$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	+	-	-	+
$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	+	-	-
$f(x)$	+	-	+	-

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n\right),\ \ n \in Z$.

Упражнения

Решить неравенства:

1. $\sqrt{4-x^2}\left(\cos 2x+\cos(2x+\arcsin 1)\right) > 0$.

2. $\sqrt{1-x^2}\left(\sin(\arccos 0+3x)+\sqrt{3}\sin 3x\right) < 0$.

Ответы:

1. $x \in \left(-\frac{3}{8}\pi;\ \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8};\ 2\right)$. **2**. $x \in \left(-1;\ -\frac{\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{18};\ 1\right)$.

Решить неравенства:

1. $|\sin x| \le 1/2$.

2. $2\cos^2 x+3\sin x-3 \ge 0$.

3. $\sin^2 x-2\sin x+1 \le 0$.

4. $\sin x+\cos x < \sqrt{2}$.

5. $\sin x \cdot \cos x \ge 1/4$.

6. $1-\cos x < \mathrm{tg}x-\sin x$.

7. $5-2\cos^2 x < 3|2\sin x-1|$.

8. $\mathrm{tg}2x-\mathrm{tg}x < 0$.

Ответы (всюду $n \in Z$).

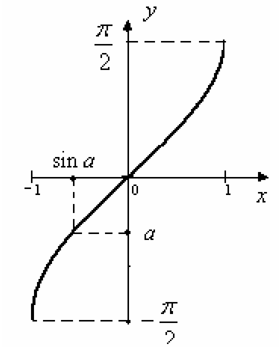
1. $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$. **2**. $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$.**3**. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

4. $x \ne \frac{\pi}{4}+2\pi n$. **5**. $\left[\frac{\pi}{12}+\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+\pi n\right]$. **6**. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.

7. $(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$. **8**. $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi n}{2}\right)$

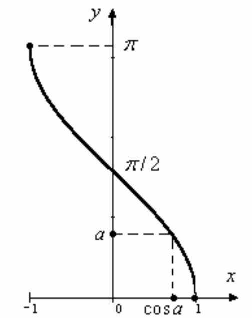
Простейшие неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции

К простейшим неравенствам относятся: $\arcsin x > a$, $\arcsin x < a$, $\arccos x > a$, $\arccos x < a$, $\operatorname{arctg} x > a$, $\operatorname{arctg} x < a$, $\operatorname{arcctg} x > a$, $\operatorname{arcctg} x < a$.



Решение простейших неравенств с обратными тригонометрическими функциями легко объяснить, используя графики этих функций.

Отметим точку a на оси Oy, $|a| < \pi/2$. Отобразим точку на ось Ox, используя график функции $y = \arcsin x$. Очевидно, неравенству $\arcsin x > a$ соответствует решение $x \in (\sin a;\ 1]$. Неравенству $\arcsin x < a$ соответствует решение $x \in [-1;\ \sin a)$.



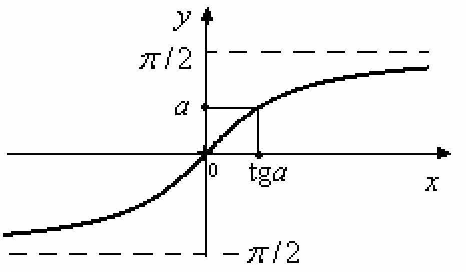
Пример 5.10 **а**) $\arcsin x > \dfrac{\pi}{6}$; $\quad x \in \left(\dfrac{1}{2};\ 1\right]$

б) $\arcsin x \le -\dfrac{\pi}{4}$; $\quad x \in \left[-1;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Отметим точку a на оси Oy, $0 < a < \pi$. Отобразим точку на ось Ox, используя график функции $y = \arccos x$. Очевидно, неравенству $\arccos x > a$ соответствует решение $x \in [-1;\ \cos a)$. Неравенству $\arccos x < a$ соответствует решение $x \in (\cos a;\ 1]$.

Пример 5.11 **а**) $\arccos x \ge \dfrac{3\pi}{4}$; $\quad x \in \left[-1;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

б) $\arccos x < \dfrac{\pi}{3}$; $\quad x \in \left(\dfrac{1}{2};\ 1\right]$.

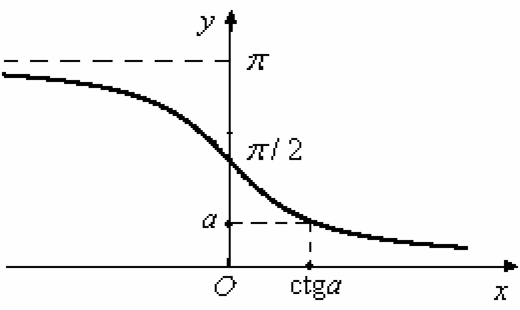


Отметим точку a на оси Oy, $|a| < \pi/2$. Отобразим точку на ось Ox, используя график функции $y = \mathrm{arctg}x$. Очевидно, неравенству $\mathrm{arctg}x > a$ соответствует решение $x \in (\mathrm{tg}a;\ +\infty)$.

Неравенству $\mathrm{arctg}x < a$ соответствует решение $x \in (-\infty;\ \mathrm{tg}a)$.

Пример 5.12 **а)** $\mathrm{arctg}x > -\dfrac{\pi}{3}$; $\quad x \in \left(-\sqrt{3};\ +\infty\right)$.

б) $\mathrm{arctg}x < \dfrac{\pi}{4}$, $\quad x \in (-\infty;\ 1)$.



Отметим точку a на оси Oy, $0 < a < \pi$. Отобразим точку на ось Ox, используя график функции $y = \mathrm{arcctg}x$. Очевидно, неравенству $\mathrm{arcctg}x > a$ соответствует решение $x \in (-\infty;\ \mathrm{ctg}a)$. Неравенству $\mathrm{arcctg}x < a$ соответствует решение $x \in (\mathrm{ctg}a;\ +\infty)$.

Пример 5.13 **а)** $\mathrm{arcctg}x > \dfrac{\pi}{6}$; $\quad x \in \left(-\infty;\ \sqrt{3}\right)$.

б) $\mathrm{arcctg}x < \dfrac{3\pi}{4}$, $\quad x \in (-1;\ +\infty)$.

Упражнения

1) Решить неравенства

1. $\arcsin x \le 5$. **2.** $\arcsin x \ge -2$.

3. $\mathrm{arctg}x > -\pi/3$. **4.** $\mathrm{arcctg}x > 2$.

5. $\arccos x < \pi/6$. **6.** $\arccos x \ge \pi/2$.

7. $\arcsin 3x \ge 0$. **8.** $\operatorname{arctg} 2x > \pi/6$.

9. $\arccos(3x-2) < \pi/4$. **10.** $\operatorname{arcctg}(0{,}5x+1) < 5\pi/6$.

2) Решить неравенства

1. $\arccos x \le \arccos 0{,}25$. **2.** $\operatorname{arctg}^2 x - 4\operatorname{arctg} x + 3 > 0$.

3. $4(\arccos x)^2 - 1 \ge 0$.

4. Найти область определения функции $y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}$.

Ответы. **1.** $[0{,}25;\ 1]$. **2.** $(-\infty;\ \operatorname{tg}1)$. **3.** $\left[-1;\ \cos\frac{1}{2}\right]$. **4.** $\left[\sqrt{2};\ 2\right]$

Смешанные неравенства

Многие неравенства, предлагаемые к решению, не являются чисто тригонометрическими, показательными и т.д., а содержат выражения различных видов. В таких случаях при решении неравенства следует исходить из общего принципа эквивалентных неравенств.

Неравенствам вида $\frac{P(x)}{G(x)} > 0$, $P(x)\cdot G(x) > 0$ эквивалентна совокупность двух систем неравенств: $\begin{cases} P(x) > 0, \\ G(x) > 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} P(x) < 0, \\ G(x) < 0. \end{cases}$ Неравенствам вида $\frac{P(x)}{G(x)} < 0$, $P(x)\cdot G(x) < 0$ эквивалентна совокупность двух систем неравенств: $\begin{cases} P(x) > 0, \\ G(x) < 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} P(x) < 0, \\ G(x) > 0. \end{cases}$

Пример 5.14 Решить неравенство:

$$(\cos x - \sin x)(x-2)^2\sqrt{3x - x^2} \ge 0.$$

Решение

Нестрогое неравенство эквивалентно совокупности уравнения и строгого неравенства.

Решаем уравнение.

$$(\cos x-\sin x)(x-2)^2\sqrt{3x-x^2}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-x^2\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l} x-2=0,\\ \cos x-\sin x=0,\\ 3x-x^2=0; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x(3-x)\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l} x=2,\\ \mathrm{tg}x=1,\\ x=0,\ x=3; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0\le x\le 3,\\ \left[\begin{array}{l} x=2,\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\\ x=0,\ x=3; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\\ x=\dfrac{\pi}{4},\\ x=2,\\ x=3. \end{array}\right.$$

Решаем строгое неравенство: $(\cos x-\sin x)(x-2)^2\sqrt{3x-x^2}>0 \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-x^2>0,\\ \cos x-\sin x>0,\\ x\ne 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(x-3)<0,\\ \cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos x-\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin x>0,\\ x\ne 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x<3,\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}>\right)0,\\ x\ne 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0<x<3,\\ -\dfrac{3}{4}\pi+2\pi n<x<\dfrac{\pi}{4}+2\pi n.\\ x\ne 0. \end{array}\right.$$ Решение системы

находим, задавая $n=0;\pm 1;\ \pm 2;\ldots$ Получим $x\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$. В ответе объединяем решения уравнения и строгого неравенства.

Ответ: $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]\cup\{2\}\cup\{3\}$.

Упражнения

Решить неравенства:

1. $(\sin x-\cos x)(x-2)\sqrt{5x-4-x^2}\ge 0$.

2. $\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)(2-x)\sqrt{3x-x^2}\le 0$.

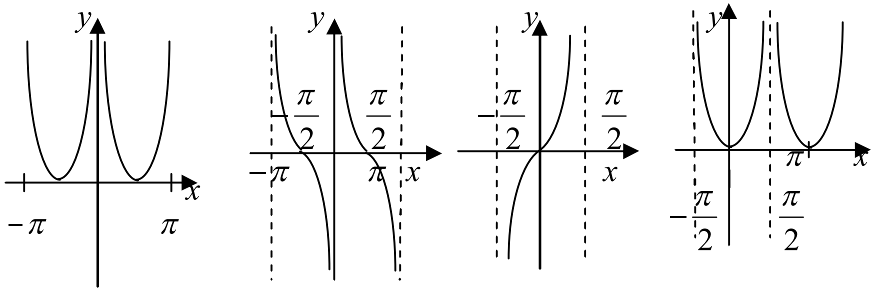
Ответы. 1. $x\in\{1\}\cup\left[2;\dfrac{5}{4}\pi\right]\cup\{4\}$. **2**. $x\in\{0\}\cup\left[\dfrac{\pi}{6};\ 2\right]\cup\{3\}$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1*	**Решите уравнение** $2\cos^2\frac{4}{x}-1=-2$. **А)** $\pm 2\arccos(-2)+4\pi n$ **Б)** $2\pi n$ **В)** Нет корней **Г)** $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$.
2	**Найти значение выражения** $\sin^2(180^\circ-\alpha)+\sin^2(270^\circ-\alpha)+\mathrm{ctg}(90^\circ+\alpha)\mathrm{ctg}(360^\circ-\alpha)$ **А)** -2 **Б)** 0 **В)** 2 **Г)** 1.
3	**Укажите наименьшее из чисел** **А)** $\cos\frac{7\pi}{6}$ **Б)** $\sin\frac{3\pi}{2}$ **В)** $\cos\frac{2\pi}{3}$ **Г)** $\mathrm{tg}\frac{9\pi}{4}$.
4*	**Найдите** $D(y)$**, если** $y=\frac{1}{\sqrt{1-\cos\frac{x}{2}}-1}$. **А)** $x\neq\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$ **Б)** $x\neq\pi n$ **В)** $x\neq 1$ **Г)** $x\neq\pi+2\pi n$.
5	**Упростите** $\sin^2\alpha(1-\mathrm{tg}\alpha)(1+\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha})$. **А)** $\cos 2\alpha$ **Б)** $\sin 2\alpha$ **В)** $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ **Г)** $-\frac{1}{\sin^2\alpha}$.
6	**Среди данных функций укажите нечетную:** **А)** $y=2x\sin 5x$ **Б)** $y=\sin^2\frac{x}{2}-1$ **В)** $y=\sin x\cos 5x$ **Г)** $y=\frac{x}{\mathrm{tg}x}$
7	**Укажите большее из чисел:** **А)** $\cos 6$ **Б)** $\mathrm{tg}12$ **В)** $\sin 4$ **Г)** $\mathrm{ctg}2$.
8*	**Найдите точки пересечения графика функции** $y=4\cos^2\frac{x}{2}-3$ **с осью абсцисс не выполняя построений.** **А)** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ **Б)** $2\pi n$ **В)** $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$ **Г)** Нет таких точек.
9	**Укажите множество значений функции** $y=\lvert 3\sin 3x\rvert$**:** **А)** $(-\infty;\infty)$ **Б)** (-3;3) **В)** $[0;3]$ **Г)** $[-1;1]$.

10 *	**Решите уравнение** $\sin\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}=\frac{1}{2}$. **А**) $\frac{2\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}n$ **Б**) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ **В**) $\frac{3\pi}{8}+2\pi n$ **Г**) $\frac{3\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}n$.
11	**Вычислите** $\cos(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2})$. **А**) 1 **Б**) 0 **В**) -1 **Г**) 1/2
12	**Найдите** $\cos 2\alpha$ **, если** $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{1}{3}$. **А**) -0,8 **Б**) 0,8 **В**) 0,9 **Г**) 0
13	**Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения** $2\sin 22{,}5^\circ\cdot\cos 22{,}5^\circ$ **А**) $[-1;1]$ **Б**) $(1;\infty)$ **В**) $(-\infty;-1)$ **Г**) $[-\sqrt{3/2};0)$.
14	**Найдите значение выражения** $3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+6\sin(-\frac{\pi}{6})$ **А**) 8 **Б**) 0 **В**) 3 **Г**) 6.
15	**Вычислите** $\mathrm{tg}225^\circ-\mathrm{tg}195^\circ$ **А**) $-2\sqrt{3}$ **Б**) $2\sqrt{3}$ **В**) $-\sqrt{3}$ **Г**) $2\mathrm{tg}15^\circ$
16	**Найдите значение выражения** $\frac{1+\mathrm{ctg}2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}$, **если** $\alpha=\frac{\pi}{4}$**.** **А**) $\sqrt{2}/2$ **Б**) 1 **В**) 1/2 **Г**) 2.
17	**Найти наименьший отрицательный корень уравнения** $\cos^2 x=\cos x$ **.** **А**) $-\pi/4$ **Б**) $-\pi/2$ **В**) -2π **Г**) Другое.
18	**Укажите корни уравнения** $\cos(2x-\frac{\pi}{4})=1$ **из промежутка** $\left(-\pi/2;\pi/2\right)$. **А**) Нет таких **Б**) $-\frac{\pi}{8}$ **В**) $\frac{3\pi}{8}$ **Г**) $\frac{\pi}{8}$.

19	**Какое из данных выражений отрицательно, если** $\alpha = 200^\circ$. **А)** $\sin\alpha\cos\alpha$ **Б)** $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ **В)** $\sin\alpha + \cos\alpha$ **Г)** $\sin\alpha - \cos\alpha$.
20	**Найдите область определения функции** $y = \arcsin\dfrac{x-3}{2}$. **А)** $x \in [1;5]$ **Б)** $x \in (-\infty;\infty)$ **В)** $x \in [-1;1]$ **Г)** $x \in (0;\dfrac{3}{2})$.
21	**Сколько корней уравнения** $\cos x = -{}^{1}\!/_{2}$ **принадлежат промежутку** $\left(-{}^{\pi}\!/_{6};{}^{2\pi}\!/_{3}\right]$. **А)** один **Б)** два **В)** ни одного **Г)** три.
22	**Сколько решений имеет система** $\begin{cases} y = \arcsin x \\ y = \lvert x-1\rvert + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. **А)** одно **Б)** ни одного **В)** два **Г)** множество.
23	**Упростите** $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha + \frac{3\pi}{2})\sin(\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)}$. **А)** $\operatorname{tg}^2\alpha$ **Б)** $-\operatorname{tg}^2\alpha$ **В)** -1 **Г)** 1.
24 *	**Решите неравенство** $\dfrac{1}{3}^{\sin x} - \dfrac{1}{3} < 0$. **А)** $x = {}^{\pi}\!/_{2}$ **Б)** нет решений **В)** $x \in (\pi n, {}^{\pi}\!/_{3} + \pi n)$ **Г)** $x = 0$.
25	**Сколько критических точек имеет функция** $y = \cos^2 x$ **на промежутке** $(-{}^{2\pi}\!/_{3};\pi)$. **А)** две **Б)** ни одной **В)** три **Г)** одну.
26	**Упростите выражение** $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$. **А)** $-\cos^2\alpha$ **Б)** 1 **В)** $\cos^2\alpha$ **Г)** $\sin^2\alpha$.
27	**Найдите производную функции** $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}4x$ **в точке** $x_0 = \dfrac{\pi}{16}$**.** **А)** -4 **Б)** 4 **В)** 0 **Г)** $1/4$.

28	**Приведите функцию** $tg(\pi+\alpha-\frac{3\pi}{2})$ **к тригонометрической функции угла** α . **А)** $\mathrm{tg}\alpha$ **Б)** - $\mathrm{tg}\alpha$ **В)** -$\mathrm{ctg}\alpha$ **Г)** $\mathrm{ctg}\alpha$.
29	**Укажите график функции** $y=\vert\mathrm{tg}x\vert$  **А)** **Б)** **В)** **Г)**
30	**Найдите множество значений выражения** $\arccos(x\sqrt{-x})$: **А)** $(\frac{\pi}{2};\pi)$ **Б)** $[\frac{\pi}{2};\pi]$ **В)** $[0;\pi]$ **Г)** другое.
31	**Какое из данных выражений не имеет смысла?** **А)** $\mathrm{arctg}\sqrt{33}$ **Б)** $\mathrm{arcctg}(1-\pi)$ **В)** $\arcsin\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **Г)** $\arccos\sqrt{3}$.
32	**Выберите функцию, убывающую на всей числовой прямой.** **А)** $y=\sin 3x+4x$ **Б)** $y=\mathrm{ctg}x$ **В)** $y=\cos x-x$ **Г)** $y=x^3+\sin x^2$.
33	**Какое утверждение верно?** **А)** $\cos 1{,}57>\cos 1{,}58$ **Б)** $\cos 1{,}57<\cos 1{,}58$ **В)** $\cos 1{,}57=\cos 1{,}58$ **Г)** $\cos 1{,}57=0$.
34	**Найдите наименьший положительный период функции** $y=\cos^2\frac{3x}{2}$. **А)** $\frac{2\pi}{3}$; **Б)** $\frac{\pi}{3}$; **В)** $1{,}5\pi$; **Г)** другое.

* **Замечание.** Во всех случаях $n\in Z$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА.

1) **Найти значение** $\cos(60^\circ - \alpha)$ **, если** $\alpha \in \mathrm{IY}$ **и** $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$ **.**

2) **Найти значение** $\sin\alpha$ **, если** $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2} = 1{,}4$ **.**

3) **Найти значение** $\sin(2\alpha + \dfrac{5\pi}{4})$ **, если** $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$ **.**

4) **Найти значения суммы** $(\alpha + \beta)$ **, если** $\alpha \in (0; \dfrac{\pi}{2})$; $\beta \in (0; \dfrac{\pi}{2})$; $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\beta = \dfrac{1}{7}$ **.**

5) **Доказать тождества:**

а) $\sin^2(\dfrac{15\pi}{8} - 2\alpha) - \cos^2(\dfrac{17}{8} - 2\alpha) = -\dfrac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$ **.**

б) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$ **.**

в) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\sin\alpha\cos\alpha} + \dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$.

6) **Вычислить значение** $\dfrac{\mathrm{tg}(\alpha - \frac{\pi}{3})}{\sin 6\alpha + 1}$, **если** $\alpha -$ **внутренний угол при вершине правильного восьмиугольника.**

7) **Вычислить** $\sin 40^\circ + 2\sin 20^\circ - \sqrt{3}\cos 40^\circ$ **.**

8) **Упростить выражения:**

а) $\dfrac{2\sin^2 85^\circ + 2\sin^2 25^\circ - 3}{4\cos^2 55^\circ}$;

б) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ **, если** $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$.

9) Доказать, что выражение $A = 4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi) +$
$+ 2\sin^2(\alpha-\varphi) - \cos 2\varphi$ **не зависит от** φ**.**

10) Показать, что выражение $\dfrac{\mathrm{ctg}x - \cos x}{\sin x - \mathrm{tg}x}$ **для всех значений** $x \neq \dfrac{\pi}{2}n,\ \ n \in Z$ **принимает лишь отрицательные значения.**

Решить уравнения

11) $8 + 7\sin x = 6\cos^2 x;$

12) $3\sin^2 x + 5\cos^2 x = 4\sin 2x$ **;**

13) $\cos x + \cos 5x - \cos 2z = 0;$

14) $\sin 11x\cos 6x = \sin 9x\cos 4x;$

15) $\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = 2;$

16) $1 + \cos x = \cos 2x = 0;$

17) $3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0;$

18) $\sin^4\dfrac{x}{2} + \cos^4\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{4};$

19) $1 - \sin 3x = (\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2})^2.$

20) $\mathrm{arctg}\,(x^2 - 2x - 4) = -\dfrac{\pi}{4};$

21) $\cos 5x + \cos x = -2\cos 3x;$

22) $4\sin^2 x - 4\cos x = 0;$

23) $5\sin 2x - 12\cos x + 5 = 12\sin x;$

24) $\mathrm{ctg}(\sin x) = 1;$

25) $\sin(\arcsin(x^2 - 2x - 9)) = x + 1;$

26) $\arcsin(x^2 + 8x - 9) = \arcsin(2x - 2);$

27) $2\sin^2 x + \sin x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{2}{\sin^2 x} = 6;$

28) $\sin\dfrac{3x}{2} = -1$**,** если $x \in (0^\circ;270^\circ);$

29) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5;$

30) $\arcsin\left(\dfrac{1}{9-2x}\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right).$

Решить неравенства:

31) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)<1.$ **32)** $\sqrt{1-\cos^2 x}<-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

33) $\sqrt[4]{\frac{9}{2}x-5-x^2}\le\sqrt{\cos x};$ **34)** $\frac{15}{(\sin x+1)}<11-2\sin x$ **;**

35) $4\sin(\frac{\pi}{3}-1{,}5x)\cos(1{,}5x-\frac{\pi}{3})<\sqrt{3};$ **36)** $\frac{tg(2x-\pi/3)}{\sqrt{1-x^2}}\le 0.$

Решить системы

37) $\begin{cases}\sin x\cos y=\sin^2 y,\\ \cos x\sin y=\cos^2 y.\end{cases}$ **38)** $\begin{cases}\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y=1,\\ x+y=\pi/4.\end{cases}$

39) $\begin{cases}\sin x\sin y=3/4,\\ \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y=3.\end{cases}$ **40)** $\begin{cases}x-y=5\pi/3,\\ \sin x=2\sin y.\end{cases}$

Библиографический список

1. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В.,. Математика: Збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. – К.: Генеза, 2008. – 104 с.: іл.

2. Титаренко О.М., Роганін О.М. Математика. Самовчитель майбутнього студента. – Харків: ТОРСІНГПЛЮС, 2007.- 448 с.

3. Шутовский О.М., Човник Ю.В., Колесникова Л.В. Тестирование. Математика – Вып. 2. – К.: Мастер-класс, 2007. -160 с.

4. Шарыгин И.Ю. Математика для школьников старших классов. –М.: Дрофа, 1995. -496 с.: ил.

5. Сборник конкурсных задач по математики для поступающих во втузы. Учебное пособие/[Под ред. Сканави М.И.] – 3-е издание дополненное. М.: Высшая школа, 1978. – 519 с.: ил.

6. Тригонометрия при экзаменационном тестировании. Методические указания./ Сост.: Л.Т. Потепалова, С.Ф. Ледяев, Е.Н. Ларионова, И.В. Ольшанская. – Севастополь: СевНТУ, - 2007. – 68с